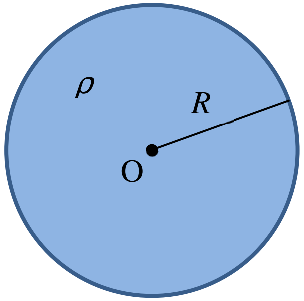
Théorème de Gauss - Exercices

Stratégie – Cf. Document « Théorème de Gauss – Stratégie »

Géométrie sphérique

1. Boule uniformément chargée en volume

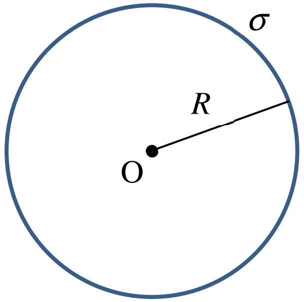
On considère une sphère de centre O et de rayon R chargée uniformément en volume avec une densité ρ.



1.1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace (intérieur ou extérieur à la distribution). On note $r = OM$.
1.2. Exprimer la charge totale Q de la sphère en fonction de R et ρ.
1.3. En déduire l'expression du champ à l'extérieur de la sphère en fonction de Q ; commenter.
1.4. Tracer la norme du champ $E(r)$ en fonction de r pour r variant de 0 à l'infini.
1.5. Déterminer le potentiel électrostatique V(M) en tout point de l'espace et tracer $V(r)$.

2. Sphère-coquille uniformément chargée en surface

On considère une sphère de centre O et de rayon R sur laquelle on dépose une charge totale Q qui se répartit uniformément en surface avec une densité σ (les charges ne sont présentes qu'à la surface : soit la sphère est creuse comme une balle de ping-pong soit la densité à l'intérieur est nulle).

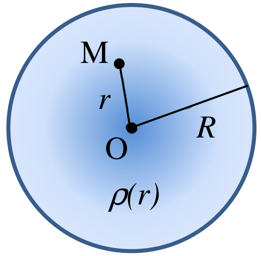


2.1. Exprimer σ en fonction de Q et R.
2.2. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M (intérieur ou extérieur à la distribution) en fonction de Q.
2.3. Déterminer le potentiel électrostatique V(M) en tout point de l'espace.
2.4. On dépose au centre O de la sphère une charge ponctuelle -Q. Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace sans calculs excessifs.

3. Champ de gravitation

3.1. Ecrire l'expression du champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ créé en M par une masse ponctuelle m située au point P.
3.2. Par analogie avec le champ électrostatique créé en M par une charge ponctuelle q placée au point P, donner l'expression du théorème de Gauss pour la gravitation.
3.3. En supposant que la terre de masse M est répartie uniformément dans tout son volume, déterminer le champ de gravitation en tout point de l'espace.

4. On considère une sphère de centre O et de rayon R chargée en volume avec une densité volumique $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r}{R}$ fonction de la distance r = OM.



4.1. Calculer la charge totale Q de la sphère.
4.2. Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

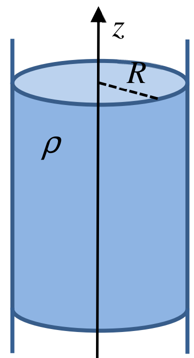
Donnée : élément de volume en coordonnées sphériques

$$d\tau = dr \times r d\theta \times r \sin\theta d\varphi = r^2 dr \times \sin\theta d\theta \times d\varphi$$

Géométrie cylindrique

5. Cylindre uniformément chargé en volume

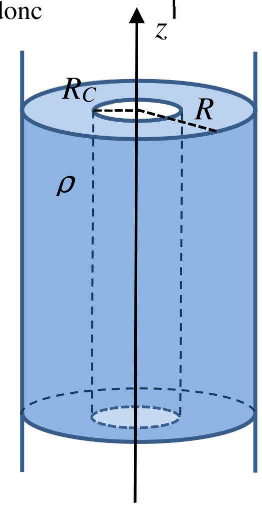
On considère un cylindre d'axe (O,z) de longueur infinie et de rayon R uniformément chargé en volume avec une densité ρ.



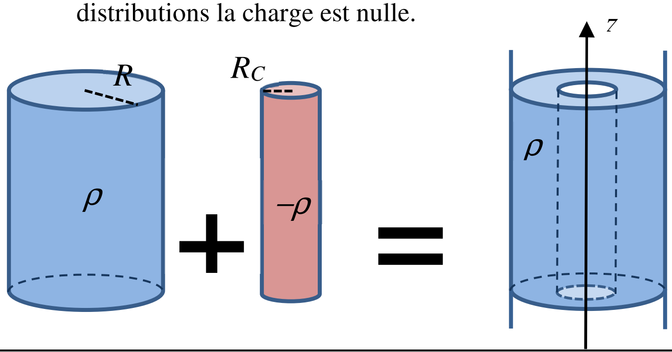
Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace (intérieur ou extérieur à la distribution).

6. Cylindre évidé sur son axe

Le cylindre précédent est à présent percé selon son axe, il présente donc une cavité cylindrique de rayon R_C et d'axe Oz vide de charge.



6.1. Etablir l'expression du champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.
6.2. On se propose de retrouver ce résultat en utilisant le principe de superposition.
En effet, cette distribution peut être considérée comme la superposition d'un cylindre de rayon R de charge volumique ρ (cf. question 5) et d'un cylindre de rayon R_C de charge volumique $\rho_C = -\rho$: dans la zone de superposition des deux distributions la charge est nulle.

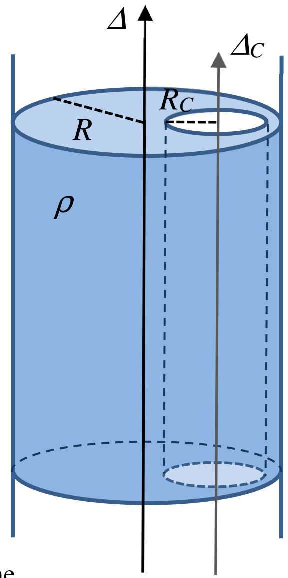


Recopier le tableau suivant en l'agrandissant et le remplir ***en utilisant exclusivement des informations déduites de la question 5*** (i.e. sans calculs supplémentaires).

r	0	R_C	R	∞
$\vec{E}$ créé par ρ				
$\vec{E}$ créé par $-\rho$				
$\vec{E}$ total				

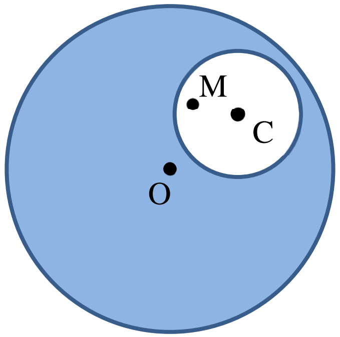
7. ***Cylindre évidé en dehors de son axe***

Le cylindre est à présent percé selon un axe Δ_C = Cz parallèle à Δ = Oz, il présente donc une cavité cylindrique de rayon R_C et d'axe Cz vide de charge.



7.1. Le théorème de Gauss est-il valide pour cette distribution ? Est-il utilisable en pratique ?

7.2. Etablir l'expression du champ en tout point M situé **à <u>l'intérieur</u>** de la cavité en fonction des paramètres du problème et du vecteur $\overrightarrow{OC}$ par la méthode de superposition.



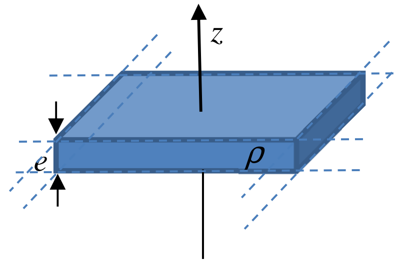
On se place pour cela dans un plan de symétrie et on note O et C les points d'intersection des axes avec ce plan de symétrie (schéma ci-contre). En utilisant exclusivement des expressions adaptées de la question 5, on exprime ensuite le champ créé par la distribution ρ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le champ créé par la distribution $-\rho$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CM}$.

7.3. Dessiner les lignes de champ dans la cavité.

Géométrie plane

8. ***Couche plane uniformément chargée en volume***

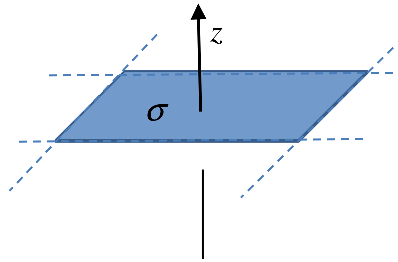
On considère une couche plane parallèle au plan (xOy) d'épaisseur e et d'extension infinie selon les directions (O,x) et (O,y) uniformément chargé en volume avec une densité ρ .



Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace (intérieur ou extérieur à la distribution).

9. ***Plan uniformément chargée en surface***

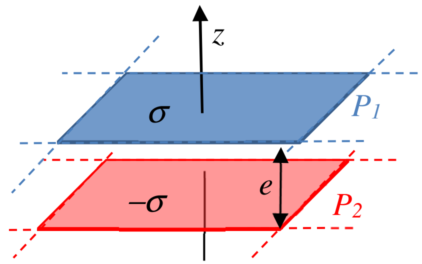
On considère un plan (sans épaisseur) parallèle au plan (xOy), d'extension infinie selon les directions (O,x) et (O,y) uniformément chargé en surface avec une densité σ .



Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace (au-dessus et en dessous de la distribution).

10. ***Condensateur plan (principe)***

On considère deux plans P_1 et P_2 (sans épaisseur) parallèles au plan (xOy), d'extension infinie selon les directions (O,x) et (O,y), uniformément chargés en surface avec les densité σ et $-\sigma$ et séparés de la distance e.



10.1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

10.2. Déterminer le potentiel électrostatique V(M) en tout point de l'espace.

10.3. Les plans P_1 et P_2 sont à présent de surface finie S.
On considère que les résultats précédents restent valables en négligeant les effets de bords (i.e. ces résultats ne sont pas exacts au voisinage des bords des plans mais on néglige ces changements).
Les deux plans constituent alors les armatures d'un condensateur plan.
Déterminer la capacité C de ce condensateur en fonction de S et e.

Rappel : $q = C\,u$ avec les conventions ci-contre.