Résumé

Équations différentielles

Équations du second ordre sans terme du 1^er^ ordre (sans second membre)

Équations de la forme :

- ✓ $\dfrac{d^2 f}{dt^2} + a\,f = 0$ ou encore $\ddot{f} + a\,f = 0$ admettant une solution *f(t)* fonction du temps *t*.
- ✓ $\dfrac{d^2 g}{dx^2} + a\,g = 0$ ou encore $g'' + a\,g = 0$ admettant une solution *g(x)* fonction d'une variable d'espace *x*.

Rq : le coefficient *a* n'a pas la même dimension dans les deux équations.

La ***forme*** des solutions (oscillatoire ou non) dépend uniquement du ***signe du coefficient a*** :

- ✓ $a > 0 \Rightarrow$ solution oscillatoire (i.e. exponentielles complexes) ; on pose alors $a = \omega^2$ ou $a = k^2$.
- ✓ $a < 0 \Rightarrow$ solution non oscillatoire (i.e. exponentielles réelles) ; on pose alors $a = -\,\omega^2$ ou $a = -\,k^2$.

<table>
<tr><th>Signe de a</th><th>Équation différentielles</th><th colspan="4">Solutions</th></tr>
<tr><td rowspan="3">a > 0</td><td>$\ddot{f} + \omega^2 f = 0$
En posant $a = \omega^2$ où ω est la pulsation temporelle $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$</td><td>$f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$</td><td rowspan="2">ou</td><td>$f(t) = \underline{A}\,e^{j\omega t} + \underline{B}\,e^{-j\omega t}$</td><td rowspan="3">Oscillateur harmonique</td></tr>
<tr><td>$g'' + k^2 g = 0$
En posant $a = k^2$ où k est la pulsation spatiale $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$</td><td>$g(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$</td><td>$g(x) = \underline{A}\,e^{jkx} + \underline{B}\,e^{-jkx}$</td></tr>
<tr><td></td><td>Ondes stationnaires</td><td>Critère de choix
↔</td><td>Ondes incidente / réfléchie</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a < 0</td><td>$\ddot{f} - \omega^2 f = 0$
En posant $a = -\,\omega^2$ où ω est la pulsation temporelle $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$</td><td colspan="3">$f(t) = A\,e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$</td><td rowspan="2"><s>Oscillateur</s></td></tr>
<tr><td>$g'' - k^2 g = 0$
En posant $a = -\,k^2$ où k est la pulsation spatiale $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$</td><td colspan="3">$g(x) = A e^{kx} + B\,e^{-kx}$</td></tr>
</table>

Rq : dans le cas de la forme complexe, les coefficients $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont complexes mais la solution finale est réelle et doit être exprimée sous forme réelle.