

Écoulements parfaits : Euler et Bernoulli

Écoulement **parfait** = écoulement **isentropique** ($\eta = 0$, pas de viscosité)

Conséquences :

- pas de couche limite ;
- **vitesse tangentielle non nulle sur les parois.**

Équation d'Euler (Leonhard Paul, 1755)

2^{ème} loi de Newton appliquée à une **particule fluide de volume $d\tau$** (de masse $dm = \mu d\tau$) dans un référentiel galiléen : $\mu d\tau \vec{a} = \mu d\tau \vec{g} - \text{grad}P d\tau + d\vec{F}$ où $d\vec{F}$ désigne les forces autres que les forces de pression.

Équation d'Euler (écoulement **parfait**, viscosité négligée) :

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \mu \vec{g} - \text{grad}P + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

ou

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = \mu \vec{g} - \text{grad}P + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

Dans un **référentiel non galiléen**, il faut ajouter les densités volumiques :

$$\frac{d\vec{F}_{ie}}{d\tau} = -\mu \vec{a}_e \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{F}_{ic}}{d\tau} = -\mu \vec{a}_c = -2\mu \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}$$

Vocabulaire

Écoulement incompressible : $\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \vec{v} = 0$.

Fluide incompressible (et indilatable) : μ indépendant de la pression et de la température. On précise parfois fluide **incompressible et homogène** pour signifier que $\mu = \text{constante}$ (pas de mélange de fluides) (on a alors également $\text{div} \vec{v} = 0$).

Stratégie : nombre d'inconnues / nombre d'équations (rappel : 1 vecteur = 3 inconnues)

- Écoulement **incompressible et homogène** \Rightarrow **4** inconnues : \vec{v} et P ($\mu = \text{cte}$, connue)
 $\text{div} \vec{v} = 0$ (incompressible) + Euler = **4** équations permettant de déterminer les 4 inconnues \vec{v} et P à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limites.
- Fluide compressible \Rightarrow **5** inconnues : \vec{v} , P et μ
Conservation masse + Euler + équation thermodynamique (écoulement isentropique) = **5** équations permettant de déterminer les 5 inconnues \vec{v} , P et μ à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limites.

Théorème de Bernoulli (Daniel, 1738)

Abréviation : écoulement **P.S.I.H.** = **Parfait, Stationnaire, Incompressible et Homogène.**

Il existe différents théorèmes de Bernoulli en fonction des hypothèses effectuées. Leurs démonstrations reposent toujours sur une intégration de l'équation d'Euler.

Écoulement P.S.I.H. et irrotationnel (potentiel)

L'équation d'Euler se réduit à : $\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\text{grad}P + \mu \vec{g}$.

En rassemblant tous les termes : $\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz \right) = \vec{0}$

Théorème de Bernoulli pour un écoulement P.S.I.H. irrotationnel ($\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \vec{0}$)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = C \quad \text{où } C \text{ est une constante indépendant du point } M \text{ dans le fluide.}$$

Écoulement P.S.I.H. et tourbillonnaire

En multipliant l'équation d'Euler par un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ **colinéaire à une ligne de champ** ($d\vec{\ell} \parallel \vec{v}$), on a $(\text{rot} \vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{\ell} = 0$. On intègre alors entre deux points A et B appartenant à cette ligne de champ (en utilisant $\text{grad}f \cdot d\vec{\ell} = df$, par définition du gradient).

Théorème de Bernoulli pour un écoulement P.S.I.H. tourbillonnaire ($\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \neq \vec{0}$)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + gz = C(\text{ligne}) \quad \text{où } C(\text{ligne}) \text{ est une constante dépendant de la ligne de courant.}$$

En pratique : $\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\mu} + gz_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\mu} + gz_B$ (A et B appartenant à la même ligne de courant).

Écoulement quelconque : 1^{er} principe pour les écoulements (cf. thermodynamique)

$\Delta(h + e_c + e_p) = w' + q$ où w' est le travail autres que le travail des forces de pression et des forces dérivant d'une énergie potentielle : travail lié aux parties mécaniques en mouvement (turbines, compresseurs...).

Avec $h = u + Pv = u + P/\mu$, enthalpie massique du fluide (u énergie interne massique).

Pour un écoulement **parfait** ($q = 0$), **compressible ou incompressible**, sans travail w' :

$$u_A + \frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\mu_A} + gz_A = u_B + \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\mu_B} + gz_B$$