Vitesse d’éjection à la sortie d’un tube relié à un réservoir de grande taille en fonction de la hauteur d’eau dans le réservoir.

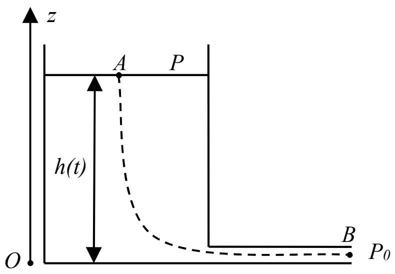
Photo : http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Torricelli

Modélisation

Un réservoir cylindrique de section S rempli d’eau se termine par un tube horizontal de longueur L et de section $s << S$ situé à sa base et fermé par un robinet qu’on ouvre à l’instant $t = 0$.

Initialement la hauteur d’eau dans le réservoir est h_0 ; à l’instant t, on la note $h(t)$.

Une fois le robinet ouvert, on suppose l’écoulement unidimensionnel à l’interface air-eau dans le réservoir avec $\vec{v}(M,t) = -V(t)\,\vec{e}_z$ et dans le tube horizontal où $\vec{v}(M,t) = v(x,t)\,\vec{e}_x$.



On prendra soin de préciser les approximations effectuées.

1. Analyse physique.
2. Relier $V(t)$, $v(x,t)$, S et s. En déduire l’expression de $v(x,t)$ en fonction S, s et $\dot{h}$.
   Justifier qu’il est possible de négliger dans la suite $V(t)$ devant $v(t)$.
3. En dehors d’une phase de courte durée, on constate que la vitesse d’éjection vaut $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ c'est-à-dire la même valeur que pour un point matériel lâché en chute libre, ce qui constitue le théorème de Torricelli. Montrer qu’on peut interpréter ce résultat en supposant que le théorème de Bernoulli est applicable bien que l’écoulement varie au cours du temps (approximation des régimes quasi-stationnaires).
4. En déduire l’expression de la hauteur d’eau $h(t)$ en fonction de S, s, h_0, g, t puis l’expression de la durée T nécessaire pour vider le réservoir. Commenter.