Théorie des jeux – Game Theory

Définition

La ***théorie des jeux*** est un domaine des mathématiques qui propose une description formelle d'interactions stratégiques entre agents (appelés « joueurs »).

Les fondements mathématiques de la théorie moderne des jeux sont décrits autour des années 1920 par Ernst Zermelo et par Émile Borel.
Dans son ouvrage de 1938, *Applications aux Jeux de Hasard*, Émile Borel développe un théorème du ***minimax*** pour les ***jeux à somme nulle à deux joueurs***, c'est-à-dire les jeux dans lesquels ce que gagne l'un est perdu par l'autre.
Ces idées sont ensuite développées par Oskar Morgenstern et John von Neumann en 1944 dans leur ouvrage *Theory of Games and Economic Behavior* qui est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne. Il s'agissait de modéliser les jeux à somme nulle où la somme des gains entre les joueurs est toujours égale à zéro. La théorie des jeux devient dès ce moment un outil théorique important de la microéconomie.

Applications

Les concepts de la théorie des jeux sont fréquemment utilisés en **analyse économique**. Depuis les années 1980, la théorie des jeux est devenue un outil standard de la science économique. Onze théoriciens des jeux ont obtenu le « prix Nobel d'économie » depuis 1944.
Outre le champ de l'économie, la théorie des jeux trouve des applications dans les **sciences sociales**, les **sciences politiques**, dans **l'analyse stratégique** comme en relations internationales ou en théorie des organisations et en **biologie évolutionniste**.
La théorie des jeux est également fondamentale dans la théorie des enchères.
Les économistes David Gale et Lloyd Shapley utilisent la théorie des jeux coopératifs pour étudier **l'appariement** des étudiants et des universités ainsi que l'appariement des hommes et des femmes sur le marché du mariage.
La théorie des jeux a également été appliquée en économie du **sport**, que ce soit à propos du football, du tennis ou du cyclisme.
La théorie des jeux a été appliquée en sciences politiques dès les années 1950 avec les travaux de Downs sur la **compétition électorale**.
Des chercheurs ont utilisé la stratégie des jeux pour mieux comprendre l'évolution du comportement des espèces face à la modification de leur environnement, il s'agit de la théorie des jeux évolutionnistes. Plus précisément, la théorie des jeux est parfois utilisée pour identifier les stratégies pour lesquelles le gain (mesuré en survie et/ou reproduction) est le plus élevé.

Eléments de classification des jeux

La théorie des jeux classifie les jeux en catégories en fonction de leurs approches de résolution.

Dans les ***jeux coopératifs***, on étudie la formation de coalitions entre les joueurs afin d'obtenir de meilleurs résultats pour leurs membres.

On appelle ***jeu à somme nulle*** ou ***jeu strictement compétitif***, les jeux à deux joueurs dans lesquels l'intérêt de l'un des deux joueurs est strictement opposé à l'intérêt de l'autre joueur.
Les échecs, le tarot ou le poker sont des jeux à somme nulle car les gains de l'un des joueurs sont très exactement les pertes de l'autre. Le jeu pierre-feuille-ciseaux est un autre exemple de jeu à somme nulle.

Dans un ***jeu simultané***, les joueurs décident en même temps de leur stratégie (exemple : le jeu pierre-feuille-ciseaux).
Dans un ***jeu séquentiel***, on peut spécifier l'ordre des décisions de sorte qu'un joueur peut décider de sa stratégie conditionnellement à ce qu'ont joué les autres joueurs précédemment (exemple : le jeu d'échecs et le jeu de go).

On dit qu'un jeu est à ***information complète*** si chaque joueur connaît lors de la prise de décision :

- ses possibilités d'action ;
- les possibilités d'action des autres joueurs ;
- les gains résultants de ces actions ;
- les motivations des autres joueurs.

Les jeux en information incomplète sont des situations où l'une des conditions n'est pas vérifiée (la plupart des jeux de carte). Ce peut être parce qu'une des motivations d'un acteur est cachée (domaine important pour l'application de la théorie des jeux à l'économie).

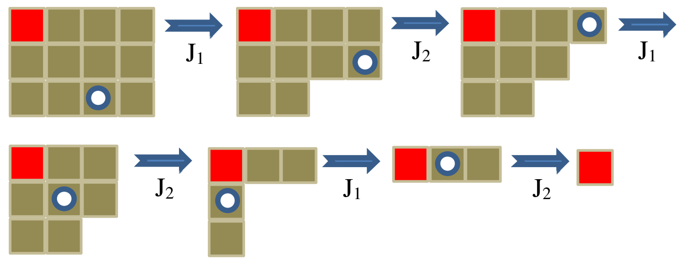
Wikipédia

✔ ***L'objectif de tout joueur est la recherche d'une stratégie gagnante !***

Exemple – Jeu de Chomp

Le jeu de Chomp (ℓ, c) se joue à l'aide d'une tablette de chocolat rectangulaire (ℓ lignes et c colonnes) dont le coin supérieur gauche est empoisonné.
Chaque joueur choisit à tour de rôle un carré (matérialisé par un disque blanc ci-dessous) et le mange *ainsi que tous les morceaux situés à la droite et en dessous du carré choisi*.
Bien évidemment, le joueur qui n'a plus d'autre choix que de manger le carré empoisonné a perdu.

Exemple de partie de Chomp (3,4) perdue par le joueur J_1 qui a commencé à jouer :



J_1 doit prendre le carré empoisonné, il perd.
A ce jeu, *deux* joueurs jouent en alternance (jeu *séquentiel*), il est *déterministe* (sans hasard), à *information complète* (règles et situation connues à tout instant), il ne peut y avoir *ni match nul ni partie infinie*, il est *à somme nulle* (ce qui est gagné par l'un est perdu par l'autre).

Graphes – Rappels pcsi et compléments

Définitions - Graphes

Graphe : couple G = (S, A) où
- S est un ensemble dont les éléments s sont appelés ***sommets*** ou ***nœuds*** du graphe ;
- A est un sous-ensemble de S × S, dont les éléments sont appelés ***arêtes*** ou ***arcs*** du graphe (i.e. paires d'éléments notées $a = (s, s')$).

Sommets s et $s' \in$ S ***voisins*** ou ***adjacents*** : il existe un arc $a = (s, s')$ reliant s et s'.

Graphe orienté : les arcs sont orientés (parcourus dans un seul sens et représentés par une flèche). Si $a = (s, t) \in$ A est un arc de G, le sommet s est dit ***origine*** et le sommet t est dit ***extrémité*** de a.

Successeurs de $s \in$ S : extrémités t des arcs d'origine s.
L'ensemble des successeurs de s est noté A(s) : $A(s) = \{t \in S : (s, t) \in A\}$;

Degré sortant de s, noté $d^+(s)$: nombre d'arcs d'origine s, i.e. nombre de successeurs de s donc $d^+(s) = |A(s)|$.

Prédécesseurs de s : origines t des arcs dont s est l'extrémité.
L'ensemble des prédécesseurs de s est noté $A^{-1}(s)$: $A^{-1}(s) = \{t \in S : (t, s) \in A\}$.

Degré entrant de s, noté $d^-(s)$: nombre d'arcs d'extrémité s, i.e. nombre de prédécesseurs de s donc : $d^-(s) = |A^{-1}(s)|$.

Un sommet s ∈ S est dit ***terminal*** s'il n'a pas de successeur, autrement dit si $A(s) = \emptyset$, ou encore si $d^+(s) = 0$.

Définitions - Chemins

Soit G = (S, A) un graphe orienté.

Chemin fini de longueur $n \in \mathbb{N}$ dans G : suite finie $(s_0, \dots, s_n) \in S^{n+1}$ de $n + 1$ sommets tels que pour tout i ∈ [1, n] le couple (s_{i-1}, s_i) est un arc de G.
s_0 est dit ***sommet initial*** ou ***origine*** du chemin, s_n est dit ***sommet final*** ou ***extrémité*** du chemin.

Chemin infini dans G : suite $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ le couple (s_i, s_{i+1}) est un arc de G.
s_0 est dit sommet initial ou origine du chemin.

Chemin maximal :
- soit le chemin est infini ;
- soit il est fini et son sommet final est un sommet terminal de G (i.e. sans successeur).

Définitions – Graphe orienté biparti ou bipartite (i.e. composé de 2 parties)

Graphe orienté biparti : triplet (G, S_1, S_2) où
- G = (S, A) est un graphe orienté ;
- S_1 et S_2 sont deux sous-ensembles de l'ensemble S des sommets, qui forment une partition de S (i.e. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $S_1 \cup S_2 = S$) ;
- $A \subset (S_1 \times S_2) \cup (S_2 \times S_1)$: tout arc ayant pour origine un sommet de S_1 a son extrémité dans S_2 et inversement.

Jeux à deux joueurs - Arène

Jeu à deux joueurs

On considère un jeu à deux joueurs J_1 et J_2 sur un graphe orienté fini $G = (S, A)$ où S est l'ensemble fini des sommets et A l'ensemble des arcs (ou arêtes).
Les sommets de G représentent les positions ou situations possibles au cours du jeu.
Chaque joueur possède son ensemble de sommets, respectivement S_1 et S_2 qui forment une partition de S : on dit que ***les sommets S_1 sont contrôlés par le joueur J_1***. De même pour S_2 et J_2. Le graphe est donc biparti.
Les arcs de G sont les coups jouables et représentent les règles du jeu.

Graphe de jeu à deux joueurs ou Arène

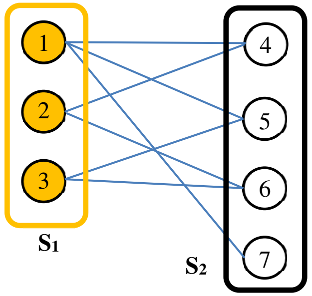
Graphe du jeu à deux joueurs ou ***arène*** : graphe orienté biparti $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ où $G = (S, A)$.
Exemple jeu de Chomp (2,3) : graphe avec sommets bleus et jaunes.

Hypothèses – Cadre de l'étude

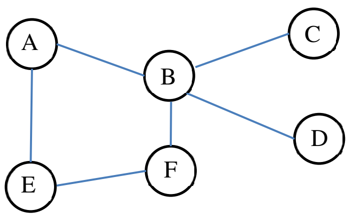
Dans la suite, on n'envisage que des ***jeux d'accessibilité*** (cf. ci-dessous) ***séquentiels, à deux joueurs, à information complète, à somme nulle, sans mémoire*** (une décision repose uniquement sur la situation du jeu à l'instant de la décision et non sur les situations antérieures) sans hasard et indépendants des joueurs (jeu impartial).

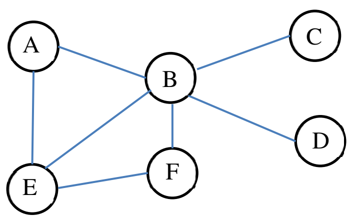
De tels jeux sont modélisés par des ***graphes orientés finis***.
Une ***situation*** ou ***position*** est un ***sommet*** du graphe.
Une ***décision*** est le choix d'un ***arc*** entre deux sommets amenant à une nouvelle situation.
Dans un ***jeu d'accessibilité***, chaque joueur souhaite atteindre un ***sous-ensemble particulier de sommets*** en se déplaçant à tour de rôle sur le graphe.
Un jeu d'accessibilité à deux joueurs est représenté par un ***graphe biparti***.

Dans un graphe G ***biparti***, l'ensemble de ses sommets S peut être divisé en deux sous-ensembles ***disjoints*** S_1 et S_2 tels que chaque arête de G a une extrémité dans S_1 et une extrémité dans S_2, il est donc possible de colorier les sommets du graphe avec 2 couleurs seulement (figure ci-contre).



Exercice 1 – Graphe biparti ou non
Les graphes ci-dessous sont-ils bipartis ?

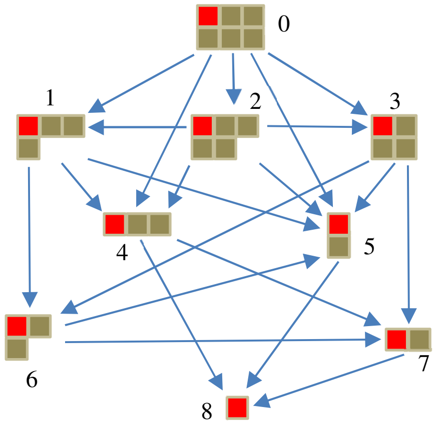




Exemple – Jeu de Chomp – Stratégie et positions gagnantes

Il est possible d'associer un graphe orienté $G = (S, A)$ au jeu de Chomp.

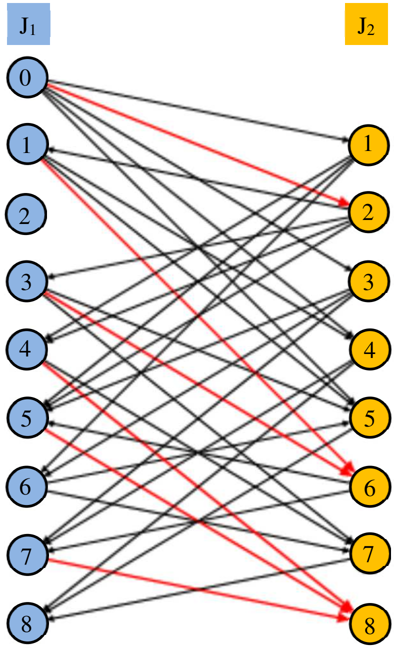
Exemple de graphe associé à une partie de Chomp (2,3).



A partir de la position de départ (numéro 0), cinq positions sont envisageables (numéros 1 à 5).
De proche en proche, on construit le graphe.
A chaque état k est associé un ***sommet*** s_k du graphe ; $S = \{s_k\}$.
A chaque coup/décision est associé un ***arc*** du graphe.

L'état 1 est un ***successeur*** de l'état 0 ou de l'état 2 mais c'est le ***prédécesseur*** de l'état 4 ou de l'état 6.
L'état 8 est ***terminal*** (il n'a pas de successeur).

En dédoublant chaque sommet et en l'indexant par le nom du joueur ou en associant une ***couleur*** pour les ***sommets contrôlés par un joueur***, il est possible de créer un ***graphe biparti*** appelé ***arène*** pour ce jeu (ci-contre).



Le joueur « bleu » J_1 commence (position 0 en bleu).
Sa décision l'amène nécessairement en 1, 2, 3, 4 ou 5.
Le joueur « jaune » J_2 joue à son tour.

Une ***stratégie gagnante*** pour le joueur J_1 est indiquée en rouge : si J_1 choisit la position 2 alors, quelle soit la décision de J_2, la partie est gagnée par J_1.
On dit que la position 0 est une ***position gagnante*** pour le joueur J_1 : toute partie débutant à cette position peut être gagnée par J_1 en suivant une stratégie.
Selon cette définition, la position 3 est également une position gagnante.
Cependant, seule la stratégie débutant à la position 0 est appelée stratégie gagnante.

Parmi les positions gagnantes pour J_1, on distingue:
- les positions contrôlées par J_1 (par exemple 0) ;
- les positions contrôlées par J_2 (par exemple 6).

Exercice 2 – Stratégie gagnante pour J_2

Si J_1 ne choisit pas la position 2 au 1er coup, existe-t-il une stratégie gagnante pour J_2 ?

Exercice 3 – Positions gagnantes pour J_1

Déterminer l'ensemble des positions gagnantes pour J_1 (i.e. contrôlées par J_1 ou par J_2).

Exemple – Jeu de Nim

On dispose d'un certain nombre de jetons (allumettes…) regroupés en différents tas ; les deux joueurs J_0 et J_1 doivent alternativement choisir l'un des tas et y prendre au moins un jeton (et au maximum tout le tas).
Le joueur qui prend le dernier jeton a perdu.

Voici un exemple de partie :

- Au départ on dispose de trois tas, un tas de 5 jetons, un de 3 et un de 2 (l'ordre des tas est sans importance) : OOOOO OOO OO
- Le joueur J_0 prend tout le tas de 3 jetons : OOOOO ~~OOO~~ OO
- Le joueur J_1 prend 3 jetons dans le paquet de 5 : OO~~OOO~~ OO
- Le joueur J_0 prend un tas entier de 2 jetons : ~~OO~~ OO
- Le joueur J_1 prend un jeton : ~~O~~O
- Le joueur J_0 est contraint de prendre le dernier jeton, donc il perd et J_1 gagne la partie.

Une variante du jeu consiste à déclarer gagnant le joueur qui prend le dernier jeton.

Dans ce jeu, il ne peut y avoir de match nul, ni de partie infinie (le nombre de jetons décroît strictement à chaque coup).

Il existe de nombreuses variantes du jeu de Nim, par exemple, tous les jetons sont disposés dans un seul tas ; on impose en revanche une règle qui précise combien de jetons chaque joueur peut enlever à son tour (la règle usuelle est que chaque joueur peut prendre soit 1, soit 2, soit 3 jetons). Encore une fois, il ne peut y avoir de match nul, ni de partie infinie.

Exercice 4 – Jeu de Nim - Arène

La figure 1 ci-contre représente les sommets du jeu de Nim avec initialement deux tas et 3 jetons par tas (3 jetons verts et 3 jetons rouges, en couleur uniquement pour clarifier les choix). Chaque joueur peut prendre 1, 2 ou 3 jetons en les choisissant dans l'un des tas.

Une position est représentée par un uplet de la forme $(n_1, n_2)^i$ d'entiers n_1 et n_2 décroissants qui sont les nombres de jetons dans chaque tas (ainsi la longueur de l'uplet est le nombre de tas) et par un exposant $i \in \{0, 1\}$ précisant le joueur qui contrôle la position.

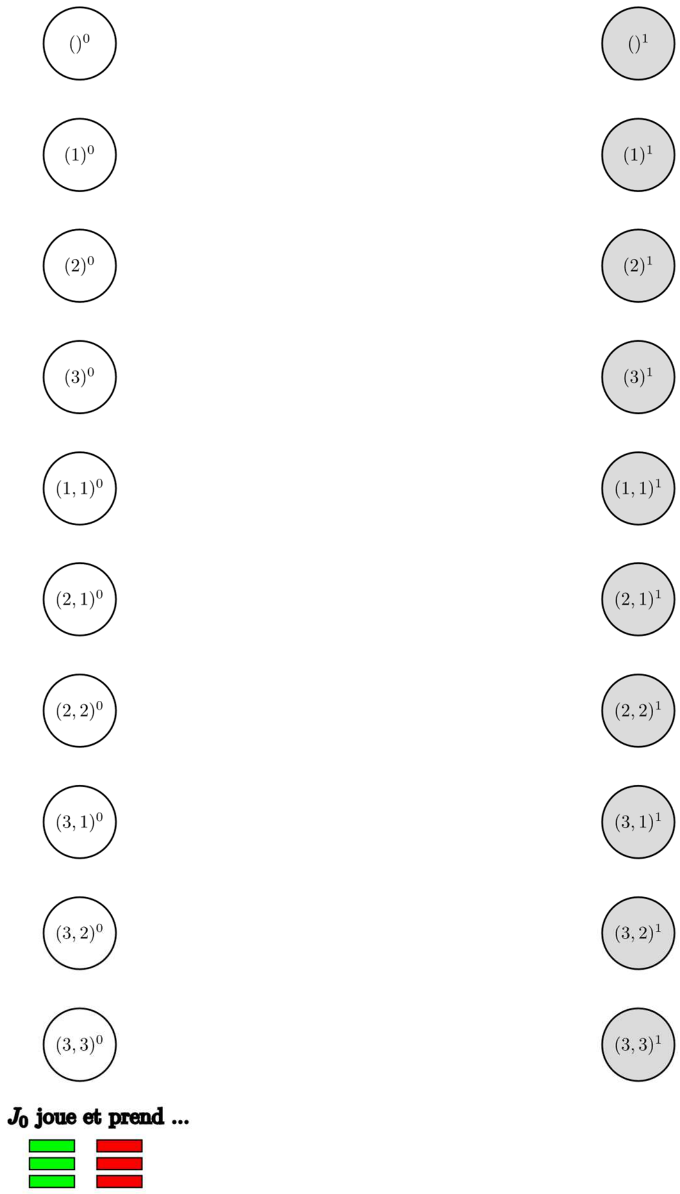
Par exemple, $(3, 1)^0$ représente la situation où il reste un tas de 3 jetons et un tas formé d'un seul jeton, et c'est à J_0 de jouer.
Cette notation est indépendante de « l'ordre » des tas.

Les positions initiales se situent donc en bas de la figure et les positions finales en haut.

Compléter la figure 1 en représentant les coups jouables (arcs du graphe) par les deux joueurs sachant que J_0 commence et contrôle les sommets blancs et J_1 contrôle les sommets grisés.

Pour le premier coup joué par J_0, il faut donc envisager 3 cas : il prend 1, 2 ou 3 jetons sans que la « couleur » (le n° du tas) importe, il y a donc 3 arcs à représenter.
A partir de ces trois positions, il faut envisager toutes les possibilités pour J_1.
Et ainsi de suite jusqu'à la fin du jeu.
Pour débuter le tracé, voir « Jeu_Nim.pdf ».

Figure 1



Aide : cf. Jeu_Nim.pdf

Jeu d'accessibilité à deux joueurs (reachability game)

Partie

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu à deux joueurs et soit s_0 un sommet de G.

Partie débutant en s_0 : *chemin maximal* de G ayant pour sommet d'origine s_0.

Partie partielle débutant en s_0 : *chemin fini* de G ayant pour origine s_0.

Ainsi, une *partie partielle* π est représentée par la succession $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ des sommets visités où pour tout j le couple (s_j, s_{j+1}) est un arc qui représente un coup joué selon les règles du jeu. π est une *partie* si π est infinie ou bien si la dernière position visitée par π est un sommet terminal de G.

Exemple - Jeu de Chomp (2,3) – Exemple de partie :

Conditions de victoire ou de gain

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu à deux joueurs.

Condition de victoire ou ***condition de gain*** pour le joueur J_i : sous-ensemble Ω_i de l'ensemble P de toutes les parties possibles tel que si $\pi \in \Omega_i$ le joueur J_i a gagné.

Jeu combinatoire, à deux joueurs, déterministe, à information complète et à somme nulle

Jeu à somme nulle : structure $J = (G, S_1, S_2, \Omega_1, \Omega_2)$ où (G, S_1, S_2) est une arène et Ω_1, Ω_2 sont deux sous-ensembles disjoints de l'ensemble de toutes les parties possibles représentant les ***conditions de victoire*** pour chaque joueur. Si une partie π appartient à Ω_i alors le joueur J_i a gagné et si $\pi \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$ alors le match est nul.

Jeu d'accessibilité

Soit un jeu à deux joueurs $J = (G, S_1, S_2, \Omega_1, \Omega_2)$ à somme nulle.

Jeu d'accessibilité (reachability game) : il existe deux ensembles V_1 et V_2 de sommets ***terminaux*** tels que Ω_i est l'ensemble des chemins se terminant en un sommet de V_i ; autrement dit, si les parties gagnées par le joueur J_i sont exactement les parties se terminant en une position de V_i.

Positions de victoire pour le joueur J_i : sommets de V_i.

Les conditions de victoire étant entièrement déterminées par les positions de victoire, on peut représenter un jeu d'accessibilité par la structure (G, S_1, S_2, V_1, V_2).

Les jeux décrits ci-dessus (Chomp, Nim et bien d'autres tels que le morpion ou OXO, le puissance 4…) sont des jeux d'accessibilité.

Exercice 5 – Jeu de Nim – Positions de victoire

Déterminer les positions de victoire pour chaque joueur dans le graphe du jeu de Nim (figure1).

Stratégies et positions gagnantes

Stratégie positionnelle ou sans mémoire

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu à deux joueurs, on note A l'ensemble des arcs de G.

Stratégie positionnelle ou ***stratégie sans mémoire*** pour le joueur J_i : application σ qui à tout sommet non terminal $s \in S_i$ fait correspondre un successeur $\sigma(s) \in A(s)$.

Autrement dit, pour toute position s contrôlée par J_i et non terminale, $(s, \sigma(s))$ est un coup jouable pour J_i.

Une partie (partielle) $\pi = (s_0, s_1, \ldots)$ est dite ***conforme*** à une stratégie σ pour le joueur J_i si pour tout sommet s_k non terminal de π appartenant à S_i on a $s_{k+1} = \sigma(s_k)$.

Autrement dit, à partir d'une position s, la position suivante est déterminée par la stratégie.

Exercice 6 – Jeu de Nim – Exemple de stratégie

On considère l'arène de la figure 1 et on suppose que les deux joueurs suivent les stratégies positionnelles σ^i suivantes où $(a, b)^i$ désigne une position où c'est le tour du joueur J_i de jouer :

$$\sigma^1\left((a,b)^1\right) = \begin{cases} (b,b)^2 & \text{si } a > b \\ (a)^2 & \text{si } a = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sigma^1\left((a)^1\right) = (a-1)^2 \quad \text{si } a > 0$$

$$\sigma^2\left((a,b)^2\right) = \begin{cases} (b,b)^1 & \text{si } a > b \\ (a)^1 & \text{si } a = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sigma^2\left((a)^2\right) = (a-1)^1 \quad \text{si } a > 0$$

En résumé :

- s'il reste deux tas, le joueur rend les tas égaux s'ils ne le sont pas ou vide un tas sinon ;
- s'il n'y a qu'un tas, le joueur prend 1 jeton.

Représenter l'unique partie conforme à cette stratégie débutant en $(3,2)^0$ sur la figure 1 ainsi que le chemin sous la forme : $(3,2)^0 \xrightarrow{J_0} (\ ,\ ) \xrightarrow{J_1} (\ ,\ )\ldots$

Stratégie gagnante

Soit $J = (G, S_1, S_2, \Omega_1, \Omega_2)$ un jeu d'accessibilité à deux joueurs.

Stratégie gagnante σ pour le joueur J_i : toute partie π conforme à σ est gagnée par J_i (i.e. $\pi \in \Omega_i$).

Pour un sommet $s \in S_1 \cup S_2$, on dit que σ est ***gagnante à partir de s*** si toute partie π qui débute en s et est conforme à σ est gagnée par J_i.

Position gagnante

Position gagnante s pour le joueur J_i : J_i possède une stratégie gagnante à partir de s.

Exercice 7 – Jeu de Chomp – Positions de victoire

Déterminer les positions gagnantes et les positions de victoire pour chaque joueur dans le graphe du jeu de Chomp(2,3).

Attracteurs

La notion d'attracteur va permettre de déterminer les positions gagnantes pour un joueur et de construire ses stratégies gagnantes.

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu où $G = (S, A)$ et soit $X \subset S$ un ensemble de sommets de G.
Étant donné un sommet $s \in S$, on rappelle que $A(s)$ désigne l'ensemble des successeurs de s dans le graphe G.
On considère l'ensemble suivant :

$$pred^1(X) = \{s \in S_1 : \exists t \in A(s) \quad t \in X\} \cup \{s \in S_2 : \forall t \in A(s) \quad t \in X\}$$

Autrement dit, $pred^1(X)$ est l'ensemble des positions qui :
- *permettent* au joueur J_1 d'amener le jeu en une position dans X ;
- *imposent* à l'adversaire J_2 d'amener le jeu en une position dans X.

On définit de même $pred^2(X)$.

En réitérant cette construction (i.e. en cherchant $pred^1(pred^1(X))$, les prédécesseurs des prédécesseurs de X et ainsi de suite), on obtient l'ensemble de tous les sommets à partir desquels le joueur a une stratégie lui permettant d'amener le jeu en X en un nombre fini de coups. Particulièrement intéressant pour $X = V_1$!

On construit l'ensemble des positions gagnantes pour le joueur J_i par récurrence à l'aide d'une suite de sous-ensembles A^i de S de la façon suivante.

Attracteur d'un ensemble X de sommets

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2)$ un graphe de jeu où $G = (S, A)$ et soit $X \subset S$ un ensemble de sommets de G.
On définit par récurrence :

$$A_0^i(X) = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; A_{n+1}^i(X) = A_n^i(X) \cup pred^i\left(A_n^i(X)\right)$$

et on pose $A^i(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^i(X)$

Bassin d'attraction ou ***attracteur*** de X pour le joueur J_i : ensemble $A^i(X)$.

Rang d'un sommet s

Pour tout sommet $s \in A^i(X)$ on définit le rang de s (par rapport à X et au joueur J_i) par :

$$rg^i(s, X) = \min\left\{n \in \mathbb{N} : s \in A_n^i(X)\right\}$$

Pour tout sommet $s \in S \setminus A^i(X)$ on pose : $rg^i(s, X) = \infty$.

Exercice 8 – Jeu de Chomp

Ecrire la suite des A_i^1 pour J_1 et préciser le nombre de coups joués par J_1 pour atteindre la cible à partir de chacun des A_i^1.

Théorème - Attracteurs et positions gagnantes dans un jeu d'accessibilité

Soit $\mathcal{G} = (G, S_1, S_2, V_1, V_2)$ un jeu d'accessibilité ; on suppose que tout sommet s de G n'a qu'un nombre fini de successeurs.
L'ensemble des positions gagnantes pour le joueur J_1 est l'attracteur de l'ensemble V_1 de ses positions de victoire, $A^1(V_1)$.

Une stratégie positionnelle σ pour le joueur J_1 telle que :
- pour tout sommet non terminal $s \in S_1 \cap A^1(V_1)$, $rg^1(\sigma(s), V_1) < rg^1(s, V_1)$
- pour tout sommet non terminal $s \in S_1 \setminus A^2(V_2)$, $\sigma(s) \notin A^2(V_2)$

existe et est gagnante depuis toutes les positions de $A^1(V_1)$ et est non perdante depuis toutes les positions de $S_1 \setminus A^2(V_2)$ (i.e. toute partie conforme à σ est soit gagnante soit un match nul).

$rg^1(s, V_1)$ est le nombre minimal de coups nécessaires pour que le joueur J_1 gagne le jeu à partir du sommet $s \in A^1(V_1)$ quelle que soit la stratégie de l'adversaire.

Exercice 9 – Jeu de Nim – Positions gagnantes et stratégies gagnantes

Objectif : déterminer les positions gagnantes pour chacun des joueurs dans le jeu de Nim représenté dans la figure 3, ainsi qu'une stratégie pour chacun des joueurs qui est gagnante depuis les positions gagnantes respectives.

Protocole :
- choisir une couleur de surligneur pour les positions gagnantes de chaque joueur (contrôlées par lui ou non) ;
- surligner les positions gagnantes au rang n (indiquer le rang à côté de chaque sommet surligné), du rang 0 au rang 5 sur les graphes ci-dessous (figures 3 à 8).

Surligner les arcs correspondant aux stratégies gagnantes partielles pour le joueur J_1 à partir du rang 2.

Cf. TP et Notebook associés.