Ondes dans les solides

Extrait de Centrale Supélec PC physique 1 2010

Vibrations musicales

Ce problème aborde les vibrations mécaniques sources de l'émission sonore de certains instruments de musique. La première partie concerne essentiellement les claviers à percussion alors que la seconde, largement indépendante de la précédente, présente une étude du fonctionnement des instruments à anche libre.
Dans tout le problème, on néglige l'influence des forces de pesanteur.

Valeurs numériques et notations	
Masse volumique de l'air	$\rho_a = 1{,}29\ \text{kg m}^{-3}$
Vitesse du son dans l'air	$c = 345\ \text{m s}^{-1}$
Viscosité dynamique de l'air	$\eta = 1{,}85\ 10^{-5}\ \text{Pa s}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1{,}00\ 10^{3}\ \text{kg m}^{-3}$
Viscosité dynamique de l'eau	$\eta_e = 1{,}0\ 10^{-3}\ \text{Pa s}$
Masse volumique de l'acier	$\rho = 7{,}80\ 10^{3}\ \text{kg m}^{-3}$
Module d'Young de l'acier	$E = 19{,}5\ 10^{10}\ \text{Pa}$
Masse volumique du bronze	$\rho = 8{,}7\ 10^{3}\ \text{kg m}^{-3}$
Module d'Young du bronze	$E = 1{,}1\ 10^{11}\ \text{Pa}$
Masse volumique du bois de palissandre	$\rho = 740\ \text{kg m}^{-3}$
Module d'Young du bois de palissandre	$E = 1{,}2\ 10^{10}\ \text{Pa}$

Les vecteurs sont notés en caractères gras.

Partie I – Claviers à percussion

Nous étudions dans cette partie certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elles produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

I.A - Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

On envisage pour l'instant les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L (figure 1). La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation.

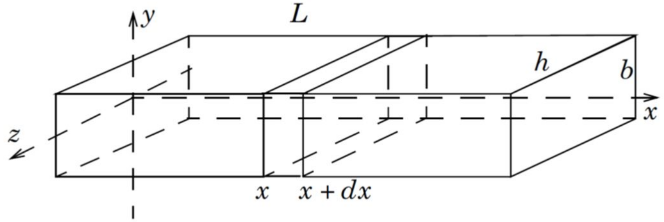

Figure 1 - Vibrations longitudinales d'une lame parallélépipédique

Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + \xi(x,t)$ et est soumise, de la part de la matière située à sa droite, à une force $\mathbf{F} = F(x,t)\mathbf{u}_x$. On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell$ la longueur d'une tige de section S, il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\delta\ell/\ell_0$.

I.A.1)
a) Exprimer $F(x,t)$ en fonction d'une dérivée partielle de $\xi(x,t)$.
b) Montrer que $\xi(x,t)$ obéit à l'équation de d'Alembert et exprimer la célérité c_ℓ des ondes longitudinales.

I.A.2) Rechercher des solutions sinusoïdales de la forme $\xi(x,t) = f(x)g(t)$ en explicitant les fonctions f et g. On introduira une pulsation temporelle ω et une pulsation spatiale k.

I.A.3) Les deux extrémités de la lame n'étant soumises à aucune force, montrer que seules certaines valeurs particulières, indexées par un entier n, sont accessibles à k. Exprimer les fréquences propres f_n de la lame.

I.A.4) Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 24{,}3\ cm$ émet un son de fréquence égale à $785\ Hz$.
Montrer qu'il ne peut pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.