Résumé

Opérateurs

Circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe

La ***circulation*** C d'un champ de vecteurs $\vec{G}(M)$ le long d'une courbe Γ est :

$$C = \int_{M\in\Gamma} \vec{G}(M).d\vec{\ell}(M) \quad \text{notée} \quad C = \oint_{M\in\Gamma} \vec{G}(M).d\vec{\ell}(M) \text{ si } \Gamma \text{ est fermée.}$$

Où $d\vec{\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire le long de Γ.

- Le *travail* $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ est la circulation de la force $\vec{F}$ le long du chemin suivi de A à B.
- La *différence de potentiel* $V_A - V_B = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ est l'opposée de la circulation du champ électrique de A à B.
- *Théorème d'Ampère* : la circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour fermé est proportionnelle aux courants enlacés par le contour : $\oint_{M\in\Gamma} \vec{B}_{(M)}\cdot d\vec{\ell}_{(M)} = \mu_0 \sum \overline{I}_\Gamma$.

Flux d'un champ de vecteur à travers une surface

Le ***flux*** Φ d'un champ de vecteurs $\vec{G}(M)$ à travers une surface S est :

$$\Phi = \iint_{M\in S} \vec{G}(M).d\vec{S}(M) \quad \text{noté} \quad \Phi = \oiint_{M\in S} \vec{G}(M).d\vec{S}(M) \text{ si } S \text{ est fermée.}$$

Où $d\vec{S}$ est le vecteur surface élémentaire.

Convention d'orientation (sens de $d\vec{S}$) :

- $d\vec{S}$ est orienté de l'intérieur **vers l'extérieur** de la surface si la surface S est **fermée** (*la surface S délimite alors un volume*).
- $d\vec{S}$ orienté par la règle de la main droite étant donné un sens positif arbitraire choisi sur le bord de la surface sinon.

- *L'intensité électrique* à travers S est le flux du vecteur densité volumique de courant à travers S : $I_S = \iint_{M\in S} \vec{j}_S \cdot d\vec{S}$.
- De même pour les *flux de particules et de chaleur* : $\phi = \iint_{M\in S} \vec{j}_N \cdot d\vec{S}$ et $\mathcal{P}_{Th} = \iint_{M\in S} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$.
- *Théorème de Gauss* : le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée est proportionnel aux charges à l'intérieur de cette surface : $\oiint_{M\in S} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

Gradient

Définition intrinsèque : $f = f(M)$ fonction dérivable, $df = \overrightarrow{grad} f . d\vec{\ell}$.

Rq : à un ***scalaire*** f, l'opérateur gradient associe un ***vecteur*** $\overrightarrow{grad} f$ ($\overrightarrow{grad} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$).

Coordonnées cartésiennes $f(x,y,z)$	Coordonnées cylindriques $f(r,\theta,z)$	Coordonnées sphériques $f(r,\theta,\varphi)$
$\overrightarrow{grad} f \left\vert \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right._{R_{cart}}$	$\overrightarrow{grad} f \left\vert \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right._{R_{cyl}}$	$\overrightarrow{grad} f \left\vert \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array}\right._{R_{sph}}$

- *Forces conservatives* : forces $\vec{F}$ telles qu'il existe E_P vérifiant $\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_P$.
  On a bien $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\overrightarrow{grad} E_P \cdot d\vec{\ell} = -dE_P$ (définition intrinsèque du gradient).
- *Statique des fluides* : l'équilibre d'un volume mésoscopique $d\tau$ de fluide soumis à son poids et aux forces de pression se traduit par $-\overrightarrow{grad} P + \rho\vec{g} = \vec{0}$ (rappel : $-\overrightarrow{grad} P\, d\tau$ traduit la poussée d'Archimède sur $d\tau$ et est orienté vers les pressions décroissantes).
- *Champ électrique* : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$ orienté vers les potentiels décroissants.
  On a bien $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = +\overrightarrow{grad} V \cdot d\vec{\ell}$ (définition intrinsèque du gradient).
- *Lois de Fick et Fourier* : $\vec{j}_N = -D\, \overrightarrow{grad}\, n$ et $\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$.

Divergence

Définition intrinsèque : $d\Phi = \vec{G}.d\vec{S} = div\vec{G}\, d\tau$

Rq : à un ***vecteur*** $\vec{G}$, l'opérateur divergence associe un ***scalaire*** $div\vec{G}$ ($div : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).

Coordonnées cartésiennes : $\vec{G}\left|\begin{array}{l} G_x(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) \\ G_z(x,y,z) \end{array}\right._{R_{cart}}$ $\quad div\vec{G} = \dfrac{\partial G_x}{\partial x} + \dfrac{\partial G_y}{\partial y} + \dfrac{\partial G_z}{\partial z}$

Coordonnées cylindriques : $div\vec{G} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rG_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial G_z}{\partial z}$

Coordonnées sphériques : $div\vec{G} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 G_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta\, G_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial G_\varphi}{\partial\varphi}$

Rotationnel (curl)

Définition intrinsèque : $dC = \vec{G}\cdot d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{rot}\vec{G}\cdot d\vec{S}$

Rq : à un ***vecteur*** $\vec{G}$, l'opérateur rotationnel associe un ***vecteur*** $\overrightarrow{rot}\vec{G}$ ($\overrightarrow{rot} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$).

Coordonnées cartésiennes : $\vec{G}\left|\begin{array}{l} G_x(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) \\ G_z(x,y,z) \end{array}\right._{R_{cart}}$ $\quad \overrightarrow{rot}\vec{G}\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial G_z}{\partial y} - \dfrac{\partial G_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G_x}{\partial z} - \dfrac{\partial G_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G_y}{\partial x} - \dfrac{\partial G_x}{\partial y} \end{array}\right._{R_{cart}}$

Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}\vec{G}\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial G_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial G_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G_r}{\partial z} - \dfrac{\partial G_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rG_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial G_r}{\partial\theta}\right) \end{array}\right._{R_{cyl}}$

Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{rot}\vec{G}\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(\sin\theta\, G_\varphi)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial G_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial G_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial(rG_\varphi)}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rG_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial G_r}{\partial\theta}\right) \end{array}\right._{R_{sph}}$

Laplacien scalaire

Définition intrinsèque : $\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)$

Rq : à un ***scalaire*** *f*, l'opérateur laplacien associe un ***scalaire*** Δf ($\Delta f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Coordonnées cartésiennes : $f(x, y, z)$ $\quad \Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Coordonnées cylindriques : $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Coordonnées sphériques : $\Delta f = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Rq : en fonction du problème, il peut être astucieux de remplacer le 1er terme par l'expression suivante : $\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)\right)$.

- Équation des ondes de d'Alembert : $\Delta f - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.
- Équations de la diffusion : $\Delta n - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$ et $\Delta T - \dfrac{1}{D_{Th}}\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Laplacien vectoriel

Définition intrinsèque : $\Delta\vec{G} = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{G}\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{G}\right)$

Ou bien : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{G}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{G}\right) - \Delta\vec{G}$

Rq : à un ***vecteur*** $\vec{G}$, l'opérateur laplacien vectoriel associe un ***vecteur*** $\Delta\vec{G}$ ($\Delta\vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$).

Coordonnées cartésiennes : $\vec{G}\begin{vmatrix} G_x(x,y,z) \\ G_y(x,y,z) \\ G_z(x,y,z) \end{vmatrix}_{R_{cart}}$ $\quad \Delta\vec{G}\begin{vmatrix} \Delta G_x \\ \Delta G_y \\ \Delta G_z \end{vmatrix}_{R_{cart}}$

Opérateur $\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}$ ($\vec{u}$ vecteur quelconque) *appliqué à un scalaire ou à un vecteur*

Appliqué à un scalaire f : $\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\right) f = \vec{u}\cdot\left(\overrightarrow{grad}\, f\right)$.

Exemple, en coordonnées cylindriques :

$$\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\right) f = \vec{u}\cdot\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \left(u_r\dfrac{\partial}{\partial r} + u_\theta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + u_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right) f(r,\theta,z)$$

Appliqué à un vecteur $\vec{G}$: $\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{G}$ ***ATTENTION***

Exemple, en coordonnées cylindriques :

$\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{G} = \left(u_r\dfrac{\partial}{\partial r} + u_\theta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + u_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(G_r\vec{e}_r + G_\theta\vec{e}_\theta + G_z\vec{e}_z\right)$ en n'oubliant pas de dériver les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ par rapport à θ.

Formule utile : $\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{u} = \overrightarrow{grad}\,\dfrac{u^2}{2} + \overrightarrow{rot}\,\vec{u}\wedge\vec{u}$.

Opérateur nabla (coordonnées cartésiennes *uniquement*)

$$\vec{\nabla}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

L'opérateur nabla permet d'écrire, en coordonnées cartésiennes :

$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} f$ $\qquad div\vec{G} = \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$ $\qquad \overrightarrow{rot}\vec{G} = \vec{\nabla}\wedge\vec{G}$

Théorèmes	*Conséquences*

Champs nuls

- La divergence d'un rotationnel est nulle : $div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{G}\right)=0$ quel que soit $\vec{G}$.
- Le rotationnel d'un gradient est nul : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right)=\vec{0}$ quelle que soit f.

Théorèmes fondamentaux

Théorème de **Green-Ostrogradski** : $\displaystyle\oiint_{P\in\text{ surface }\Sigma\text{ fermée}} \vec{G}(P).d\vec{S}_{ext}(P) = \iiint_{M\in\text{ volume V limité par }\Sigma} div\left(\vec{G}(M)\right)d\tau(M)$

Rq : $d\vec{S}_{ext}$ est à la normale à Σ en P orientée vers ***l'extérieur*** de Σ.

Théorème de **Stokes-Ampère** : $\displaystyle\oint_{M\in\text{ courbe C}} \vec{G}(M)\cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_{P\in\text{ surface }\Sigma\text{ posée sur C}} \overrightarrow{rot}\vec{G}(P)\cdot d\vec{S}(P)$

Rq : les orientations de C (donc le sens de $d\overrightarrow{OM}$) et de $d\vec{S}$ sont liés par la règle de la main droite.

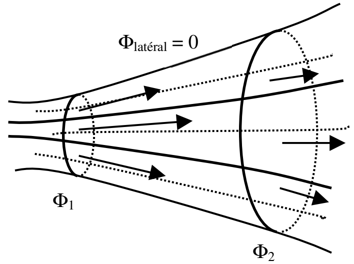
Champ à divergence nulle

Théorème : $div\,\vec{G}=0\ \ \forall M \Leftrightarrow \oiint_S \vec{G}\cdot d\vec{S}=0\ \ \forall S \Leftrightarrow \exists\vec{X}$ tq $\vec{G}=\overrightarrow{rot}\vec{X}$

$\vec{G}$ est dit à ***flux conservatif*** (conservation du flux dans un *tube de champ*).

Conservation du flux ⇔ flux à travers une surface fermée nul ⇔ divergence nulle

En prenant un tube de champ comme surface fermée (ci-contre), on a donc $|\Phi_1|=|\Phi_2|$ et comme $S_1 < S_2$, on a $G_1 > G_2$: *plus les lignes de champ sont serrées, plus le champ est intense*.



- Le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif (flux nul à travers une surface fermée).
- En *régime stationnaire*, les densités de flux de courant $\vec{j}$, de particules $\vec{j}_N$, de chaleur $\vec{j}_Q$, de masse $\vec{j}$ sont à flux conservatifs : $div\,\vec{j}=0$ en régime stationnaire.

Champ à rotationnel nul

Théorème : $\overrightarrow{rot}\,\vec{G}=\vec{0}\ \ \forall M \Leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{\ell}=0\ \ \forall\Gamma \Leftrightarrow \exists f$ tq $\vec{G}=\overrightarrow{grad}\,f$

$\vec{G}$ est à ***circulation conservative*** (circulation nulle sur une courbe *fermée*) alors $\vec{G}=\overrightarrow{grad}\,f$.

Circulation conservative ⇔ circulation le long d'une courbe fermée nulle ⇔ rotationnel nul

- Le champ électrostatique $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V$ est à circulation conservative (circulation nulle le long d'un contour fermé).
- Les forces conservatives $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\,E_p$ sont à circulation conservative (travail nul si le point d'arrivée est identique au point de départ).