Résumé

Ondes électromagnétiques dans le vide

On étudie les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans une région ***vide de charges et de courants*** (à une distance $r \gg$ extension spatiale caractéristique des charges et courants).

Ondes électromagnétiques dans le vide

Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les *champs sont couplés* entre eux par les équations de Maxwell.

Équation de propagation des champs

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Dans un domaine vide de charges, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont solutions d'une équation de propagation de d'Alembert avec une célérité c.

Surface d'onde

Surface d'onde = *lieu des points dans le même état vibratoire* (mêmes valeurs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$).

Ondes planes (O.P.)

Les surfaces d'onde sont des *plans orthogonaux à la direction de propagation fixe* $\vec{u}$.

Ondes planes progressives (O.P.P.) dans la direction $\vec{u}$

Onde de la forme $f(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)$ ou $F\left(t - \frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$ = vecteur unitaire de la direction de propagation.

Rq : l'onde plane est un modèle valable loin des sources, elle présente un caractère non physique étendue à tout l'espace (extensions spatiale et temporelle infinies donc énergie infinie).

Ex : $E_x(M,t) = E_x(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)$, de même pour E_y, E_z, B_x, B_y et B_z.

Solution générale de l'équation de d'Alembert = superposition d'O.P.P dans toutes les directions $\vec{u}$ de l'espace.
Attention, en général, l'onde résultante n'est pas plane.

Ondes planes progressives harmoniques (O.P.P.H.) dans la direction $\vec{u}$

Onde de la forme $E_x(M,t) = E_{x0}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_x)$ (de même pour E_y, E_z, B_x, B_y et B_z).

Où $\vec{k} = k\,\vec{u}$ (vecteur d'onde) et $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

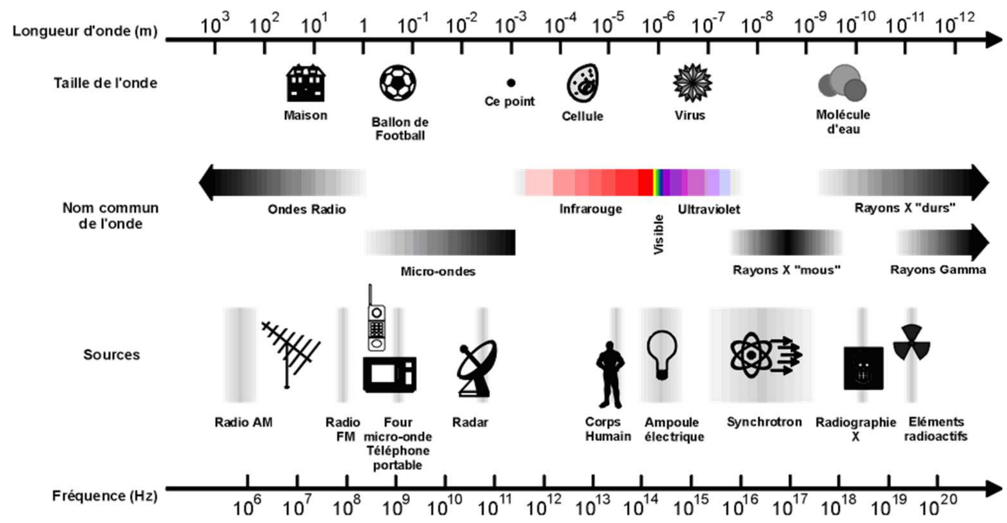
L'analyse de Fourier permet d'écrire une O.P.P périodique de période $T = 2\pi/\omega$ quelconque comme une somme d'O.P.P.H. de pulsations $\omega_n = n\omega$: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \vec{k}_n\cdot\vec{r} + \varphi_n)$.

Solution générale de l'équation de d'Alembert = superposition d'O.P.P.H., la somme portant à la fois sur la direction de propagation $\vec{u}$ et sur la pulsation ω.

O.P.P.H. en formalisme complexe : $\dfrac{\partial}{\partial t} = j\omega$ et $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$: $\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} = -jk_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = -jk_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = -jk_z \end{array}\right.$.

En coordonnées *cartésiennes* : $\overrightarrow{grad}\,f = \vec{\nabla}f$, $div\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, $\overrightarrow{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\wedge\vec{a}$, $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$.

Spectre des ondes électromagnétiques



Téléphone portable : 800 – 900 MHz et 1,8 – 1,9 GHz.
Optique (visible) : $\approx 10^{14}$ Hz.

Ondes planes progressives harmoniques (O.P.P.H.) dans le vide

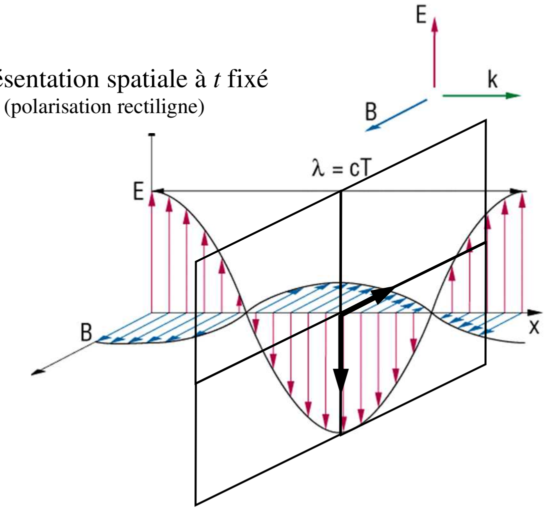
Structure des OPPH dans le vide

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux à la direction de propagation $\vec{u}$, on dit que les OPPH sont transverse électrique et transverse magnétique.

Relation de structure : $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$: $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forment un trièdre direct

$$\frac{E(M,t)}{B(M,t)} = c \quad \forall\, t : \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont en phase.}$$

Représentation spatiale à t fixé
(polarisation rectiligne)



Relation de dispersion / vitesse de phase / vitesse de groupe

$$k = \frac{\omega}{c} \text{ (dans le sens de } \vec{u}\text{)} \Rightarrow v_\varphi \overset{def}{=} \frac{\omega}{k} = c \text{ (non dispersif) et } v_g \overset{def}{=} \frac{d\omega}{dk} = c$$

Polarisation des ondes électromagnétiques

La ***polarisation*** d'une onde électromagnétique correspond à la ***direction*** du champ $\vec{E}$.
Le ***plan de polarisation*** est le plan $\left(\vec{E}, \vec{u}\right)$.

Expression générale du champ électrique se propageant dans la direction $\vec{u} = \vec{e}_x$:

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{array} \right. .$$

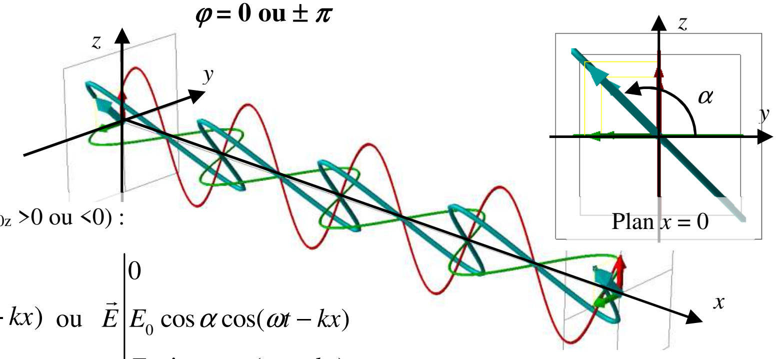
Comprendre

Le champ électrique étant orthogonal à la direction de propagation, la composante E_x est nulle.

Polarisation des OPPH – Définitions (Cf. TP polarisation)

Polarisation rectiligne : dans un plan d'onde, le champ $\vec{E}$ oscille selon une droite

$\varphi = 0$ ou $\pm \pi$



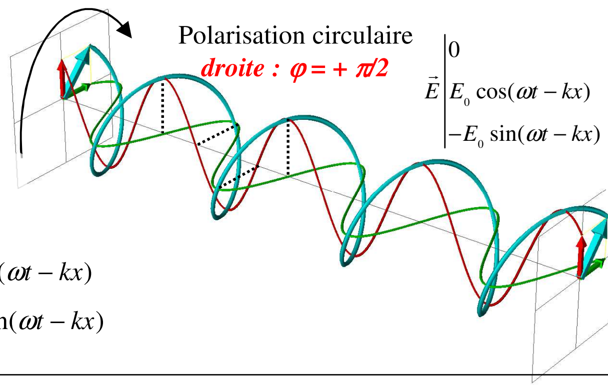
Plan $x = 0$

Cas général (E_{0z} et E_{0z} >0 ou <0) :

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \vec{E} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kx) \\ E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kx) \end{array} \right.$$

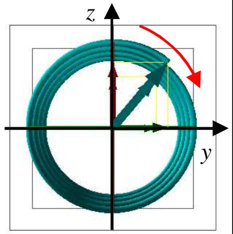
Polarisation circulaire : dans un plan d'onde, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit un cercle

$E_{0y} = E_{0z} = E_0 > 0$ et $\varphi = \pm \pi/2$



Polarisation circulaire
droite : $\varphi = + \pi/2$

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ -E_0 \sin(\omega t - kx) \end{array} \right.$$



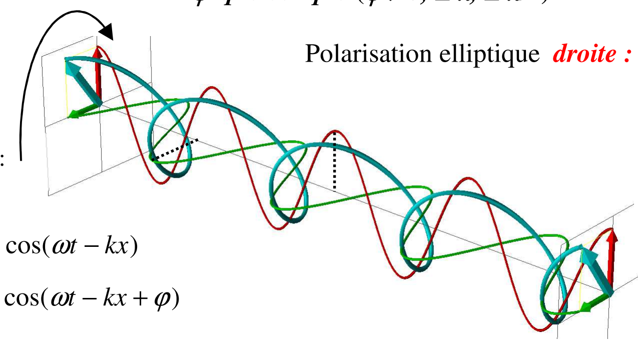
Plan $x = 0$

Cas général :

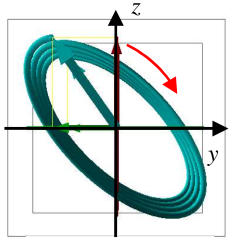
$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_0 \sin(\omega t - kx) \end{array} \right.$$

Polarisation elliptique : dans un plan d'onde, l'extrémité de $\vec{E}$ décrit une ellipse

φ quelconque ($\varphi \neq 0, \pm \pi, \pm \pi/2$)



Polarisation elliptique *droite :*



Plan $x = 0$

Cas général :

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{array} \right.$$

O.P.P.H. quelconque (i.e. P.E.) = Σ 2 ondes P.R. de directions de polarisation ⊥ entre elles.
O.P.P.H. quelconque (i.e. P.E.) = Σ 2 ondes P.C. de sens opposés (1 gauche et 1 droite).

Figures réalisées grâce au logiciel ENANIM de András Szilágyi (http://www.enzim.hu/~szia/emanim/emanim.htm).

Propagation de l'énergie des OPPH

Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} \overset{def}{=} \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \overset{OPPH}{=} \dfrac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u}$ en Wm^{-2}.

Puissance à travers dS : $dP = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$.

Densité volumique d'énergie : $u_{em} \overset{def}{=} \varepsilon_0 \dfrac{E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0} \overset{OPPH}{=} \varepsilon_0 E^2$ en Jm^{-3}.

Énergie électromagnétique dans $d\tau$ à t : $dU_{em} = u_{em}\, d\tau = \varepsilon_0 E^2 d\tau$.

Moyennes temporelles ($\tau_{\text{récepteur}} >> T = 2\pi/\omega \Rightarrow$ grandeurs mesurées = grandeurs moyennes)

Pour une OPPH polarisée elliptiquement : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2\mu_0 c}\vec{u}$ et $\langle u_{em} \rangle = \dfrac{\varepsilon_0 (E_{0y}^2 + E_{0z}^2)}{2}$.

L'énergie est proportionnelle à E^2 et se propage dans la direction de propagation à la célérité c dans le vide.

Intensité - Éclairement énergétique en optique (OPPH)

$I(M) = \langle \|\vec{\Pi}(M,t)\| \rangle_{tps}$ proportionnel à E_0^2 . $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ en Wm^{-2}.

Lien avec la description corpusculaire en termes de photons

Relation de Planck-Einstein (énergie du photon) :

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{où} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \text{et } h = 6{,}62\ 10^{-34}\ \text{Js}$$

Relation de de Broglie (quantité de mouvement du photon) :

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$$

Aspect ondulatoire et aspect corpusculaire

- ✓ Relation de dispersion $k = \dfrac{\omega}{c}$ et relation $E = pc$ pour le photon

  La relation de dispersion permet de retrouver simplement la relation entre E et p pour un photon en multipliant ses deux membres par $\hbar$.

- ✓ Puissance et flux de photons ϕ (nombre de photons par seconde dans le faisceau) :

  $$\mathcal{P} = \langle \Pi \rangle S = h\nu\, \phi .$$