Résumé

Ondes sonores dans les fluides

Bande passante de l'oreille (sons audibles) : *20 Hz* à *20 kHz*. Ultrasons : *20 kHz* à quelques *MHz*.
Vitesse du son dans l'air (conditions usuelles) : $c_{son} \approx 340\ ms^{-1}$ ($c_{lumière} = 300\ 000\ 000\ ms^{-1}$).
Onde acoustique = 5 inconnues : $\mu(M,t)$, $P(M,t)$, $\vec{v}\,(M,t)$.
5 équations : Euler, conservation masse, relation thermodynamique.
Ondes sonores dans les solides : cf. chapitre « Ondes » (modélisation masses + ressorts).

Équations fondamentales des ondes sonores – Équation de propagation

Approximation acoustique

- **Écoulement parfait** (i.e. évolution isentropique caractérisée par χ_S).
- **Pesanteur négligée**.
- Onde sonore = **perturbation de l'état de repos** (champs μ_0, P_0, $\vec{v} = \vec{0}$ uniformes) :

$$\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t),\quad P(M,t) = P_0 + P_1(M,t)\quad \text{et}\quad \vec{v}\,(M,t) = \vec{v}_1\,(M,t)$$

où $\langle\mu_1\rangle_T = \langle P_1\rangle_T = \langle\vec{v}_1\rangle_T = 0$ (*moyennes temporelles nulles*) et μ_1/μ_0 , P_1/P_0 et v_1/c sont des *infiniment petits du même ordre* (linéarisation des équations) ainsi que leurs *dérivées spatiales et temporelles*.

P_1, également notée $\tilde{P}$, est la *surpression* (par rapport à la valeur au repos P_0) ou **pression acoustique** (<u>>0 ou <0</u>).

L'approximation acoustique est donc une approximation linéaire d'ordre 1 (DL₁) en μ_1 , P_1 , $\vec{v}_1$ et leurs dérivées.

Équations fondamentales dans l'approximation acoustique

Équation d'Euler : $\mu_0 \dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}P_1$ (couplage P_1 / $\vec{v}_1$).

Conservation de la masse : $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 div\,\vec{v}_1 = 0$ (couplage μ_1 / $\vec{v}_1$).

Évolution isentropique : $\mu_1 = \mu_0 \chi_S P_1$ (couplage μ_1 / P_1).

Où χ_S est le **coefficient de compressibilité isentropique** défini par $\chi_S = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S$.

Équations de propagation des ondes sonores

$$\Delta P_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{v}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = 0$$

Avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$

Célérité des ondes sonores – Ordres de grandeur

$$c_{solide} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}\quad (E : \text{module d'Young}).\qquad c_{fluide} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}.$$

$c_{acier} \approx 4000\ ms^{-1}$ $\qquad c_{eau} \approx 1400\ ms^{-1}$ $\qquad c_{air} \approx 340\ ms^{-1}$

Gaz parfait : loi de Laplace $\Rightarrow \chi_S = \dfrac{1}{\gamma P} \Rightarrow c_{GP} = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}$.

Ondes sonores planes progressives

Surface d'onde = ***lieu des points dans le même état vibratoire*** (mêmes valeurs de P, μ, $\vec{v}$).

Ondes planes (O.P.)

Les surfaces d'onde sont des ***plans orthogonaux à la direction de propagation*** *fixe* $\vec{u}$.

Ondes planes progressives (O.P.P.) dans la direction $\vec{u}$

Onde de la forme $f(\vec{u}\cdot\vec{r} - ct)$ ou $F\left(t - \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c}\right)$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$ = vecteur unitaire de la direction de propagation.

Rq : l'onde plane est un modèle valable loin des sources, elle présente un caractère non physique étendue à tout l'espace (extensions spatiale et temporelle infinies donc énergie infinie).

Ex : O.P.P. se propageant selon $\vec{e}_x$: $P_1(M, t) = f(x-ct)$

Ondes planes progressives harmoniques (O.P.P.H.) dans la direction $\vec{u}$

Onde de la forme $P_1(M,t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)$ où $\vec{k} = k\,\vec{u}$ et $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

L'analyse de **Fourier** permet d'écrire une O.P.P périodique de période $T = 2\pi/\omega$ quelconque comme une somme d'O.P.P.H. de pulsations $\omega_n = n\omega$: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\vec{k}_n\cdot\vec{r} - \omega_n t + \varphi_n)$.

Solution générale de l'équation de d'Alembert = ***superposition d'O.P.P.H.*** *de pulsations ω_n multiples de la pulsation fondamentale ω (pulsation du signal périodique considéré).*

En formalisme complexe : $\dfrac{\partial}{\partial t} = j\omega$ et $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$: $\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} = -jk_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = -jk_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = -jk_z \end{array}\right.$.

Rappels : $\overrightarrow{grad}P = \vec{\nabla}P$, $div\,\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$, $\Delta P = \vec{\nabla}^2 P$, $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v}$, $\Delta P = div(\overrightarrow{grad}P)$.

Structure des O.P.P. – Impédance acoustique

Les ondes sonores sont ***longitudinales*** : $\vec{v}_1 \ // \ \vec{u}$.

$P_1(M, t) = \mu_0 c\, v_1(M, t)$: P_1 et v_1 vibrent en phase (P_1 et v_1 proportionnels).

Impédance acoustique : $Z_{OPP} = \dfrac{P_1}{v_1}$

$$Z_{OPP} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}} \quad \text{selon } \vec{e}_x$$

$$Z_{OPP} = -\mu_0 c = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}} \quad \text{selon } -\vec{e}_x$$

Comprendre : l'impédance est une notion caractérisant le *couplage entre une cause et un effet*, elle s'exprime en fonction des *caractéristiques du milieu*.
En électricité (circuit *R, L, C*) : $Z = U/I = Z(R, L, C)$.
En électromagnétisme (câble coaxial) : $Z_C = v(x,t)/i(x,t) = \pm\sqrt{\Lambda / \Gamma}$.
En acoustique : $Z_{OPP} = P_1/v_1 = \pm\mu_0 c = \pm\sqrt{\mu_0 / \chi_S}$.
« Cause » = tension (ddp), pression. « Effet » = courant, vitesse.

Ordres de grandeur :

	μ_0	c	Z_{OPP}
Air	1,3 kgm^{-3}	340 ms^{-1}	440 u.s.i
Eau	10^3 kgm^{-3}	1400 ms^{-1}	10^6 u.s.i

Aspects énergétiques

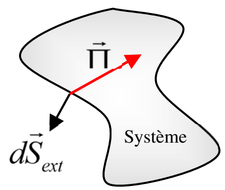
Puissance échangée à travers une surface S

Puissance mécanique échangée par l'onde sonore avec le fluide à travers une surface S :
$\mathcal{P} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ (en *W*) où $\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1$ (en *Wm*$^{-2}$) vecteur densité volumique de flux de puissance.

Puissance reçue par un système de volume V limité par une surface S :

$$\mathcal{P}_{\substack{entrante \\ ext\to V}} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{P}_{\substack{\text{sortante} \\ V\to ext}} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext} = -\mathcal{P}_{\substack{\text{entrante} \\ ext\to V}}$$



$d\vec{S}$ orientée vers l'intérieur du système ⇔ flux entrant, ***puissance entrante*** : convention thermodynamique (convention du porte-monnaie) ;
$d\vec{S}_{ext}$ orientée vers l'extérieur du système ⇔ flux sortant, ***puissance sortante*** (théorème de Green-Ostrogradski par exemple).

Densité volumique d'énergie

Densité volumique d'énergie : $e = \dfrac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \dfrac{1}{2}\chi_S P_1^2$ (en *Jm*$^{-3}$).

La densité e comporte un terme d'énergie cinétique de la particule fluide et un terme d'élasticité lié à la pression (lié à l'énergie interne via le travail des forces de pression car q = 0 : écoulement parfait).

Équation locale de conservation de l'énergie

Bilan local d'énergie : $\dfrac{\partial e}{\partial t} + div\vec{\Pi} = 0$ (en *Wm*$^{-3}$).

Onde plane progressive harmonique : valeurs moyennes

Pour une OPPH $v_1 = v_{1m}\cos(\omega t - kx)$: $\langle e \rangle = \dfrac{1}{2}\mu_0 v_{1m}^2$ et $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{1}{2}\mu_0 c v_{1m}^2 \vec{u} = \dfrac{1}{2} Z v_m^2 \vec{u}$.

On retrouve le caractère non physique des OPP car $e = cte$ (énergie infinie dans tout l'espace).
$< \Pi > = ½ Z v_{1m}^2$ est de la forme « $P = ½ R i_m^2$ ».

Intensité sonore – Décibels acoustiques

Intensité énergétique ou éclairement : $\mathcal{E} = \left\langle \dfrac{d\mathcal{P}}{dS} \right\rangle = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \| P_1 \vec{v}_1 \| \rangle$ (en *Wm*$^{-2}$).

Écart en *dB* entre 2 sons d'intensité énergétique $\langle \Pi \rangle$ et $\langle \Pi_0 \rangle$: $I - I_0 = 10 \log \dfrac{\langle \Pi \rangle}{\langle \Pi_0 \rangle}$.

On fixe par convention un niveau de référence $I_0 = 0\ dB$ pour $\langle \Pi_0 \rangle = 10^{-12}$ Wm^{-2}.

L'intensité (ou niveau) sonore en *dB* est alors : $I = 10 \log \dfrac{\langle \Pi \rangle}{\langle \Pi_0 \rangle}$

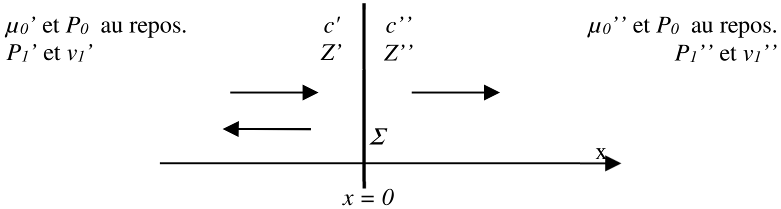
Ordres de grandeur

	Deuil d'audition	Forte intensité	Seuil douleur
Intensité énergétique $\mathcal{E} = \langle \Pi \rangle$ en *Wm*$^{-2}$	10^{-12} Wm^{-2}	10^{-4} Wm^{-2}	1 Wm^{-2}
Amplitude surpression P_{1m} en *Pa*	3 10^{-5} Pa	0,3 Pa	30 Pa
Intensité sonore *I* en *dB*	0 dB	80 dB	120 dB

Réflexion et transmission d'une O.P.P. sous incidence normale

Conditions aux limites - Notations - Méthode

Deux fluides différents (air/eau par exemple) séparés par une interface Σ en $x = 0$.



Dans l'approximation acoustique $v_1 << c$, le déplacement δx de l'interface est tel que $\delta x << \lambda$, il peut donc être négligé : l'interface reste confondue avec le plan $x = 0$.

- ✓ Théorème de la résultante dynamique appliqué à un élément dS de l'interface
  $\Rightarrow$ $P_1'(0,t) = P_1''(0,t)$: continuité de la surpression à l'interface.
- ✓ Deux fluides non miscibles (i.e. paroi imperméable, ex : air/eau)
  $\Rightarrow$ $v_1'(0,t) = v_\Sigma = v_1''(0,t)$: continuité de la vitesse normale (= vitesse, ici) à l'interface.

Expressions des champs :

$$\underline{v}_1' = \underline{A}_i e^{j(\omega t - k'x)} + \underline{A}_r e^{j(\omega t + k'x)} \qquad \underline{v}_1'' = \underline{A}_{tr} e^{j(\omega t - k''x)}.$$

$$\underline{P}_1' = Z'\underline{A}_i e^{j(\omega t - k'x)} - Z'\underline{A}_r e^{j(\omega t + k'x)} \qquad \underline{P}_1'' = Z''\underline{A}_{tr} e^{j(\omega t - k''x)}$$

Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Pour la vitesse : $r_v = \dfrac{\underline{A}_r}{\underline{A}_i} = \dfrac{Z' - Z''}{Z' + Z''}$ et $t_v = \dfrac{\underline{A}_t}{\underline{A}_i} = \dfrac{2Z'}{Z' + Z''}$

Pour la pression : $r_P = -r_v$ et $t_P = \dfrac{Z''}{Z'} t_v$

Rq :
- Conditions aux limites en $x = 0$ et expressions des champs $\Rightarrow$ $t_v = 1 + r_v$ et $t_P = 1 + r_P$.
- t_P et $t_v > 0$ donc ondes incidente et transmise en phase.
- $Z' = Z''$ $\Rightarrow$ $r_v = r_p = 0$ et $t_v = t_P = 1$: impédances adaptées (pas d'ondes réfléchies), utile en échographie (utilisation d'un gel « antireflet »).
- $Z' \to \infty$ (mur en $x = 0$) $\Rightarrow$ ondes stationnaires avec nœud de vitesse et ventre de pression sur le mur.

Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} Z v_m^2 \vec{u} \;\Rightarrow\; \langle \Pi_i \rangle = \frac{1}{2} Z' A_i^2,\; \langle \Pi_r \rangle = -\frac{1}{2} Z' r_v^2 A_i^2 \text{ et } \langle \Pi_t \rangle = \frac{1}{2} Z'' t_v^2 A_i^2.$$

$$R = \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} = r_v^2 = \left(\frac{Z' - Z''}{Z' + Z''}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} = \frac{Z''}{Z'} t_v^2 = \frac{4Z'Z''}{(Z' + Z'')^2}$$

Conservation de la puissance sonore à l'interface : $R + T = 1$ ($\Rightarrow \mathcal{P}_r + \mathcal{P}_t = \mathcal{P}_i$).

Ondes sphériques harmoniques

En écrivant l'équation d'onde en ***coordonnées sphériques***, on montre que le champ de surpression $P_1(r,t)$ peut s'écrire :

- ✓ $P_1(r,t) = \dfrac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi)$, ***onde sphérique divergente*** ;
- ✓ $P_1(r,t) = \dfrac{A}{r}\cos(\omega t + kr + \varphi)$, ***onde sphériques convergente***.

Avec $k = \omega/c$.

L'amplitude de la surpression est donc proportionnelle à $1/r$ pour une onde sphérique.

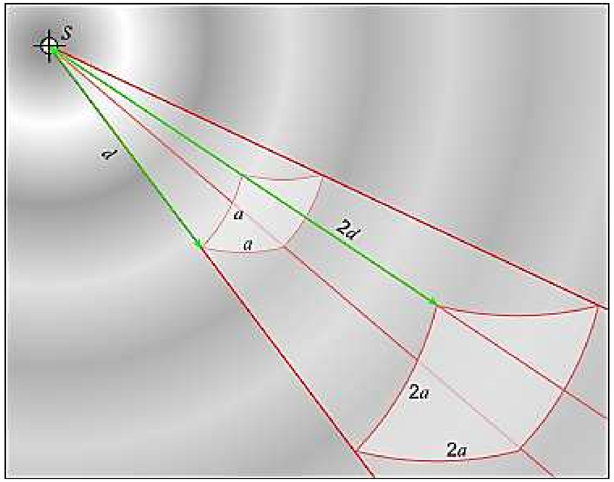
De l'équation d'Euler, on peut déduire par intégration l'expression du champ des vitesses $\vec{v}_1$.

On peut alors calculer $\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1$ puis sa moyenne temporelle.

$\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{A^2}{2\mu_0 c r^2} \vec{e}_r$ **proportionnel à $1/r^2$** (résultat connu pour les ondes sphériques).

Rq : cette formule est analogue à celle obtenue pour les ondes ***planes*** : $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_{1m}^2}{Z}$.

La puissance sonore moyenne à travers une sphère de centre *O* et de rayon *r* est alors indépendante du rayon *r* : $\langle \mathcal{P}(r) \rangle = \dfrac{2\pi A^2}{\mu_0 c}$ = constante (conservation du flux).



D'après http://fr.wikipedia.org/wiki/Intensit%C3%A9_acoustique#mediaviewer/File:Champ.svg

On comprend intuitivement que le produit P_{1m}^2 (proportionnel à $1/r^2$) x surface (proportionnelle à r^2) soit constant.