Ondes - Définitions

Une onde en un point M à l'instant t peut être décrite par un signal ***scalaire*** $s(\mathrm{M}, t)$ ou par un signal ***vectoriel***.

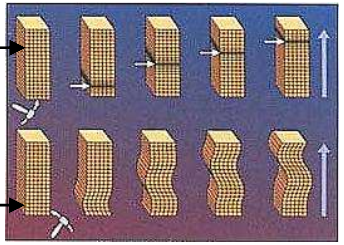
Ondes scalaires : ondes sonores dans les fluides, dans les solides, ondes sur une corde, un ressort…

Ondes vectorielles : ondes électromagnétiques (lumière, WIFI, bluetooth, téléphonie…)

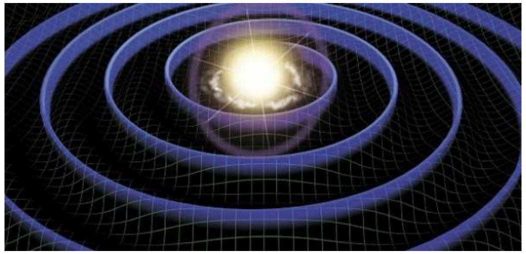
Classification des ondes

Onde ***longitudinale*** : le signal $s(\mathrm{M}, t)$ est // à la direction de propagation (ressort, son…).
Exemples : sons dans l'air.

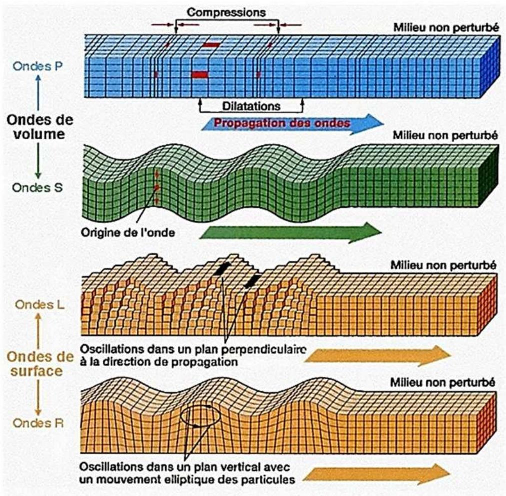
Onde ***transversale*** : le signal $s(\mathrm{M}, t)$ est $\perp$ à la direction de propagation (corde, vagues…).
Exemples : corde, ondes électromagnétiques.



http://en.wikipedia.org/wiki/Seismic_wave



Vue d'artiste montrant des ondes gravitationnelles produites par l'explosion d'une étoile.
https://lejournal.cnrs.fr/articles/a-la-poursuite-des-ondes-gravitationnelles

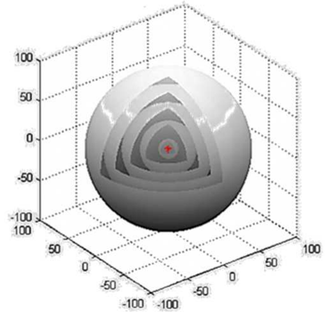


Forme des surfaces d'ondes – Ondes planes (O.P.) – Ondes sphériques

Surface d'onde = ***lieu des points dans le même état vibratoire à l'instant t***.
$s(\mathrm{M}, t)$ est uniforme sur cette surface à t (même valeur de s en tout point M de la surface).

Onde ***sphérique*** : $s(\mathrm{M}, t)$ ne dépend que de la distance r à la source (ponctuelle).
En coordonnées sphériques, $\boldsymbol{s(\mathrm{M}, t) = s(r, t)}$.

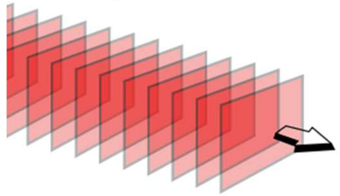
Ce modèle est utilisé pour étudier les ***ondes au voisinage de sources ponctuelles*** dans un milieu homogène et isotrope.



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Spherical_Wave.gif

Onde ***plane*** : $s(\mathrm{M}, t)$ est uniforme dans tout plan orthogonal à la direction de propagation.
En coordonnées cartésiennes, $\boldsymbol{s(\mathrm{M}, t) = s(x, t)}$.

Ce modèle est utilisé pour étudier des ***ondes loin de leurs sources*** dans un milieu homogène et isotrope (surfaces d'onde assimilables à un plan au niveau du détecteur).



http://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_plane

Les plans correspondent aux fronts d'onde qui doivent être considérés comme ***infinis*** dans le modèle de l'onde plane.
Ce modèle n'est pas acceptable physiquement car l'extension spatiale de l'onde est infinie (énergie infinie) mais il constitue un intermédiaire de calcul utile dans plusieurs situations.

Par abus de langage, on utilise fréquemment le terme d'onde plane pour des phénomènes unidimensionnels (corde, chaîne d'atomes...). On imagine alors plusieurs chaînes d'atomes parallèles sièges de la même perturbation (modélisation d'un solide).

Ondes planes progressives (O.P.P.)

Une onde plane de la forme :

- ✓ $s(\mathrm{M}, t) = \boldsymbol{f(x - ct)}$ ou $s(\mathrm{M}, t) = \boldsymbol{\phi(t - x/c)}$ est dite <u>o</u>nde <u>p</u>lane <u>p</u>rogressive et se propage ***sans déformation*** à la ***vitesse c*** dans le sens des ***x croissants*** (onde incidente) = OPPH$_{\rightarrow}$.
- ✓ $s(\mathrm{M}, t) = \boldsymbol{g(x + ct)}$ ou $s(M, t) = \boldsymbol{\psi(t + x/c)}$ est dite <u>o</u>nde <u>p</u>lane <u>p</u>rogressive et se propage ***sans déformation*** à la ***vitesse c*** dans le sens des ***x décroissants***.

Ondes planes stationnaires

Une onde plane de la forme $\boldsymbol{s(\mathrm{M}, t) = F(x)\, G(t)}$ (où il y a découplage des variables d'espace et de temps) est dite <u>o</u>nde <u>p</u>lane <u>s</u>tationnaire et ***ne se propage pas*** (oscillations « sur place »).

Onde plane progressive harmonique (O.P.P.H.) / monochromatique (O.P.P.M.)

Une onde ***plane progressive harmonique*** est de la forme : $s(x, t) = s_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$.

Où $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ est la ***pulsation temporelle*** (ω en *rad s*$^{-1}$) et $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ est la ***pulsation spatiale***.

Cette onde possède donc une ***double périodicité spatiale et temporelle*** :

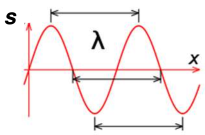
$$s(x,t) = s_m \cos\left[2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right]$$

- périodicité temporelle $T = \dfrac{1}{N} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (T en s et *fréquence* N en Hz) ;

  La fréquence N (et donc T) est imposée par la source.

- périodicité spatiale $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ (*longueur d'onde* λ en m).

  La longueur d'onde λ (et donc k) dépend du milieu.



Définition

Le ***vecteur d'onde*** est défini par : $\vec{k} = k\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le **vecteur unitaire de la direction de propagation** (pour une OPPH se propageant dans le sens des x croissants, on a $\vec{u} = \vec{e}_x$).

Définition

La Phase de l'onde est : $\Phi(x, t) = \omega t - kx + \varphi$

Phase à l'origine : φ (valeur de Φ à $t = 0$ en $x = 0$).

Conséquence

Les ***plans d'onde*** (x=*cte*) à t donné (t=*cte*) sont donc les ***surfaces équiphases*** (Φ =*cte*).

O.P.P.H. et notation complexe

Au signal $s(x,t) = s_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$, on associe la ***grandeur complexe instantanée*** $\underline{s}(x,t) = \underline{s}_m\, e^{j(\omega t - kx)}$ où $\underline{s}_m = s_m e^{j\varphi}$ est ***l'amplitude complexe***.

On a alors $\dfrac{\partial \underline{s}}{\partial t} = j\omega \underline{s}$ et $\dfrac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -jk\,\underline{s}$.

Et, à $s(x,t) = s_m \cos(\omega t + kx + \varphi)$, on associe $\underline{s}(x,t) = \underline{s}_m\, e^{j(\omega t + kx)}$ et alors $\dfrac{\partial \underline{s}}{\partial x} = +jk\,\underline{s}$

Vitesse de phase d'une O.P.P.H. – Propagation d'une O.P.P.H.

Les ***surfaces équiphases*** (***plans*** ou ***fronts d'onde***) d'une onde de pulsation ω se déplacent avec la ***vitesse de phase*** $v_\varphi(\omega) = \dfrac{\omega}{k(\omega)}$. Cette vitesse peut donc, a priori, dépendre de ω.

Rappel : ω est imposée par la source tandis que k, lié à λ, dépend du milieu de propagation.

Autres formulations : $v_\varphi(\omega) = \dfrac{\omega}{k(\omega)} = \dfrac{\lambda(\omega)}{T}$ d'où les relations bien connues $\lambda = v_\varphi T = \dfrac{v_\varphi}{N}$.

La vitesse de phase v_φ est la vitesse de propagation de l'O.P.P.H. considérée (c'est-à-dire la vitesse de propagation « de la sinusoïde de pulsation ω » dans le milieu).

Comprendre – Notion de vitesse de phase – Expression de la vitesse de phase

Dire que l'onde est progressive signifie qu'elle se propage sans déformation ou encore que l'onde en x à l'instant t se retrouve identique en $x+dx$ à l'instant $t+dt$: $\cos(\omega t - kx + \varphi) = \cos[\omega(t+dt) - k(x+dx) + \varphi]$.
On aurait également pu écrire directement l'égalité des phases $\Phi(x, t) = \Phi(x+dx, t+dt)$.
Donc le plan d'onde, ou plan équiphase, en x à t se retrouve en $x+dx$ à $t+dt$ et on peut écrire : (pour tout x et tout t), $\omega t - kx = \omega(t+dt) - k(x+dx)$ d'où $dx/dt = \omega/k$ représente la vitesse de déplacement du plan d'onde considéré (plan équiphase) ou vitesse de phase.

Équivalence des formes harmoniques progressives et stationnaires

En utilisant les formules de transformation du cosinus d'une somme en produit de cosinus, on vérifie que les solutions harmoniques progressives peuvent s'exprimer en somme d'ondes harmoniques stationnaires :

$$s_m\cos(\omega t - kx + \varphi) = s_m\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx) + s_m\sin(\omega t + \varphi)\sin(kx).$$

Réciproquement, les formules de transformation de produit de cosinus en somme de cosinus permettent d'exprimer une solution stationnaire en somme d'ondes progressives :

$$s_m\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi) = s_m/2\cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + s_m/2\cos(\omega t - kx + \varphi - \psi).$$

Ondes – Equation de propagation

Équations de propagation ou équation d'onde – Phénomènes ondulatoires

Intuitivement, une onde $s(x, t)$ décrit une grandeur physique se propageant de proche en proche, évoluant dans l'espace et dans le temps.
Mathématiquement, les variations spatiales et temporelles de cette grandeur $s(x, t)$ sont liées aux dérivées partielles $\partial s/\partial x$ et $\partial s/\partial t$.

L'équation d'onde ou ***équation de propagation*** est donc une ***relation entre les dérivées partielles de s(x, t)***.

Exemples : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ *équation de propagation de d'Alembert*

$\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \dfrac{\omega_0^2}{c^2} s = 0$ (équation de propagation de Klein-Gordon)

Équation de propagation de d'Alembert

À 1 dimension : $\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = 0$.

À 3 dimensions : $\Delta s(M,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s(M,t)}{\partial t^2} = 0$ où Δs est le ***laplacien*** de s.

En coordonnées cartésiennes, $\Delta s(M,t) = \dfrac{\partial^2 s(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 s(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 s(x,y,z,t)}{\partial z^2}$.

Solutions progressives de l'équation de propagation de d'Alembert

Les solutions générales de l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ peuvent s'écrire sous la forme **d'ondes planes** $s(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ ou $s(x, t) = \phi(t - x/c) + \psi(t + x/c)$.

Les fonctions f et g sont a priori quelconques mais, si elles sont périodiques, l'analyse de ***Fourier*** permet d'écrire ces fonctions sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales (ou harmoniques). C'est la raison pour laquelle on étudie en détail le cas des ondes planes progressives harmoniques.

ATTENTION : ***la solution générale*** de l'équation de d'Alembert, bien que somme de deux ondes progressives se propageant en sens inverses, ***n'est pas progressive*** en général.

Relation de dispersion pour une O.P.P.H.

D'une façon générale, ***l'équation de propagation*** vérifiée par une ***O.P.P.H.*** $s(x,t)$ impose une relation entre ω, k et c appelée ***relation de dispersion*** : $k = k(\omega)$ ou $\omega = \omega(k)$.

L'équation d'onde de ***d'Alembert*** impose à une ***O.P.P.H.*** $s(x, t) = s_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$, la ***relation de dispersion*** : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ ou encore : $k = \pm\dfrac{\omega}{c}$.

Rq : la solution $k = -\omega/c$ correspond à une onde se déplaçant vers les x décroissants.

Comprendre

Une OPPH $s(x, t) = s_m\cos(\boldsymbol{\omega t - kx} + \varphi)$ doit s'écrire sous la forme $f(\boldsymbol{x - ct})$ pour être solution de l'équation de d'Alembert. On peut écrire :

$$s(x,t) = s_m\cos(\omega t - kx + \varphi) = s_m\cos\left[k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) - \varphi\right] = f(x - ct).$$

Cette condition se « lit » aisément dans cette écriture : on doit avoir $\omega/k = c$.
Rappel : la grandeur ω/k s'interprète comme la vitesse de phase v_φ (vitesse de déplacement des OPPH).

Méthodes pour établir l'équation de dispersion

- Dans le cas d'une OPPH, on injecte la grandeur complexe $\underline{s}(M,t)$ dans l'équation de propagation.
- Dans le cas d'une onde quelconque, la grandeur réelle $s(M,t)$ dans l'équation de propagation.

Conséquences :

Par définition, $v_\varphi(\omega) = \dfrac{\omega}{k(\omega)}$. Par ailleurs, la relation de dispersion impose $k = \dfrac{\omega}{c}$.

On en déduit que $v_\varphi(\omega) = c$: **la vitesse de phase d'une *O.P.P.H.* vérifiant une *équation d'onde de d'Alembert* est indépendante de sa pulsation**.

Un signal *non sinusoïdal* peut être décomposé en une *somme d'O.P.P.H.* (Fourier). Toutes ses composantes se propageant à la même vitesse c, elles ne se déphasent pas les unes par rapport aux autres : ***un signal non sinusoïdal n'est donc pas déformé au cours de sa propagation et sa vitesse de propagation est définie sans ambiguïté et vaut également c***.

Ceci cesse d'être vrai lorsque $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$. ***La vitesse de propagation d'un signal non sinusoïdal n'est alors ni v_φ ni c en général***. Chacune des O.P.P.H. constituant le signal se propage à $v_\varphi(\omega)$, ces O.P.P.H. se déphasent donc les unes par rapport aux autres : ***le signal se déforme au cours de sa propagation***. En conséquence, sa vitesse n'est plus définie de façon simple.

Autrement dit, il peut arriver que toutes les O.P.P.H. ne possèdent pas la même vitesse de phase selon leur fréquence, il en résulte alors le phénomène de dispersion (cf. chapitre consacré à ce sujet).