Résumé

Analyse de Fourier

Analyse de Fourier : les concepts essentiels

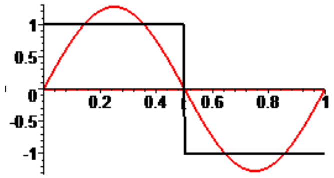
Un signal périodique *quelconque s(t)* peut s'exprimer comme une somme de fonctions sinusoïdales dont les amplitudes, les fréquences et les déphasages se calculent mathématiquement (cf. ci-dessous).

Exemples :

1. $s(t) = \sin^2(\omega t) = \dfrac{1-\cos(2\omega t)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2\omega t)$

   $s(t)$ = ***valeur moyenne*** + fonction sinusoïdale de pulsation multiple de ω

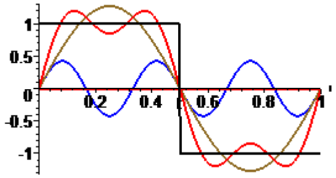
2. $s(t)$ = signal carré (courbe noire) et $S_F(t)$ = somme de Fourier partielle (courbe rouge)



Ordre 1 : $S_F(t) = \dfrac{4}{\pi}\sin(\omega t)$

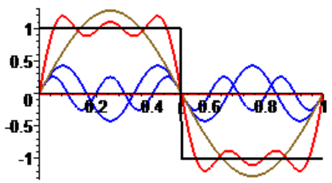
Le carré est « approximé » par une sinusoïde de même fréquence.

Fondamental = sinusoïde de même fréquence que le signal



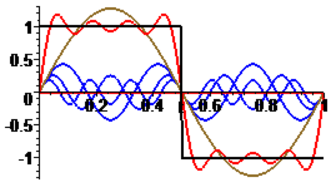
Ordre 3 : $S_F(t) = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \dfrac{1}{3}\sin(3\omega t)\right)$

Fondamental + ***harmonique*** 3 (fréquence triple).



Ordre 5 : $S_F(t) = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \dfrac{1}{3}\sin(3\omega t) + \dfrac{1}{5}\sin(5\omega t)\right)$

Fondamental et harmoniques 3 et 5.



Ordre 7 :

$S_F(t) = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \dfrac{1}{3}\sin(3\omega t) + \dfrac{1}{5}\sin(5\omega t) + \dfrac{1}{7}\sin(7\omega t)\right)$

Fondamental et harmoniques 3, 5 et 7.

Le signal carré apparaît comme une somme (théoriquement infinie) de sinusoïdes de *fréquences multiples de la fréquence fondamentale* (fréquence du carré).

En pratique, une somme partielle de quelques termes réalise une approximation du signal.

L'amplitude des harmoniques décroît lorsque l'ordre augmente **(propriété générale)**.

Développement en série de Fourier

Sous certaines conditions de régularité (cf. cours de mathématiques), un signal ***périodique*** *s(t)* de période *T* et de fréquence ***f*** *= 1/T* peut s'écrire comme une ***somme infinie de fonctions sinusoïdales de fréquences 0, f, 2f, 3f…multiples de f*** :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(2\pi nf\,t) + b_n\sin(2\pi nf\,t)\right].$$

Ou encore : $s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(2\pi nf\,t + \varphi_n)$ (avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan\varphi_n = -\dfrac{b_n}{a_n}$).

Fondamental : composante de fréquence ***f*** - fréquence du signal *s(t)* - correspondant à ***n =1***.

Harmoniques de rang n ($n \geq 2$) : composantes de fréquence ***nf***, multiples de la fréquence du signal *s(t)*.

Musique : les harmoniques sont responsables du timbre d'un instrument.

Spectre : ensemble des fréquences présentes dans le développement en série de Fourier.

Optique : lumière blanche décomposée en *raies* colorées (*fréquences* précises) par un prisme.

Domaine temporel vs domaine spatial :

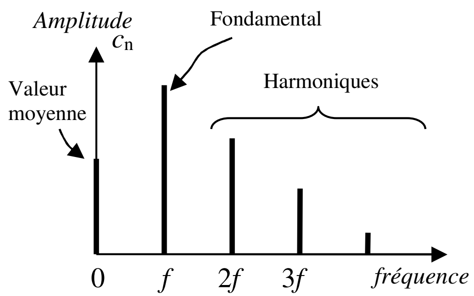
Variable temporelle t de période T : $s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\dfrac{2\pi n}{T}t\right) + b_n\sin\left(\dfrac{2\pi n}{T}t\right)\right]$

Variable spatiale x de période λ : $s(x) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda}x\right) + b_n\sin\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda}x\right)\right]$

Représentation d'un spectre en amplitude :

Un spectre en amplitude est représenté par un diagramme en bâtons (f en abscisse, amplitude c_n en ordonnée).

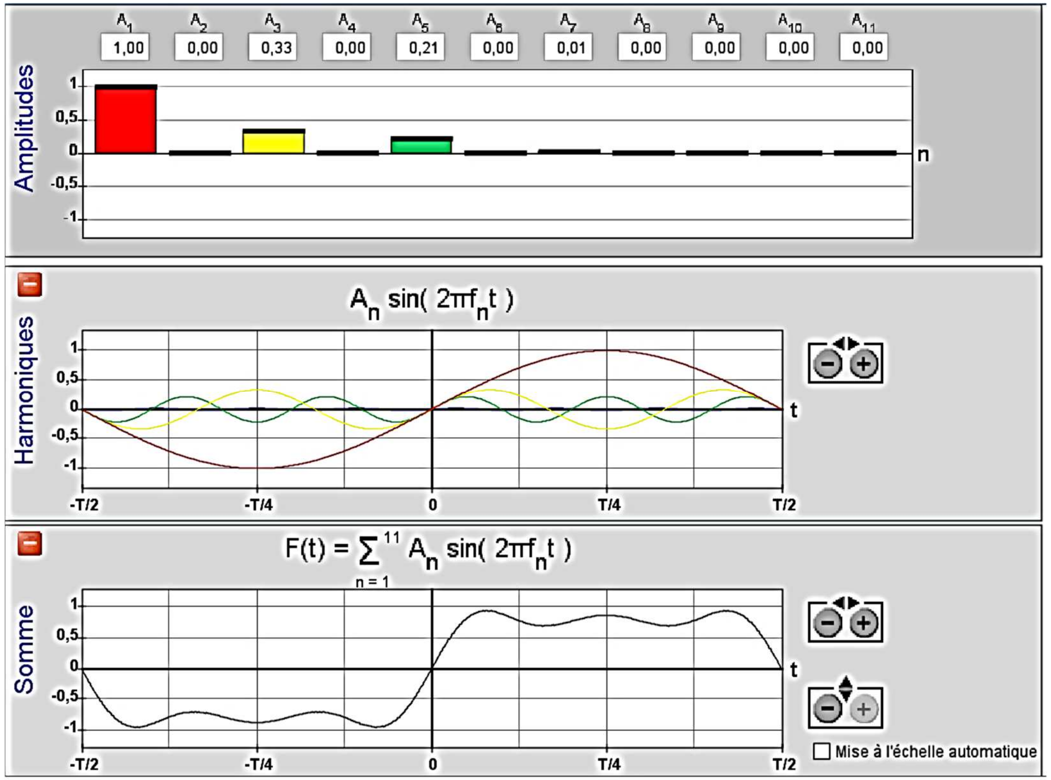
La ***valeur moyenne***, associée à un terme constant, correspond donc à un signal sinusoïdal de ***fréquence nulle*** dans le spectre.



Intérêt du développement en série de Fourier

Pour un système ***linéaire***, la réponse à un signal $s(t)$ ***périodique*** quelconque est la **somme** des réponses à chacun des termes de son développement en série de Fourier.

Analyse de Fourier temporelle – Spectre des fréquences temporelles



Analyse de Fourier spatiale – Spectre des fréquences spatiales