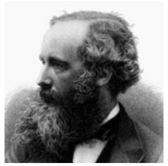
Résumé

Équations de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831 – 1879)



Postulats de l'électromagnétisme

Conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = \sum_i \rho_i \\ \vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i \end{cases} .$$

Champ électromagnétique

La force exercée par la distribution (ρ, $\vec{j}$) sur la charge q en M est la ***force de Lorentz*** :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(M,t) + \vec{v}\left(M/\mathcal{R}\right) \wedge \vec{B}(M,t)\right).$$

Où $(\vec{E},\vec{B})$ est le ***champ électromagnétique*** créé en M à l'instant t par la distribution $(\rho,\vec{j})$.

Ce champ est solutions des ***équations locales de Maxwell*** (1864) :

$$\begin{cases} div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & Maxwell-Gauss \\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & Maxwell-Faraday \\ div\vec{B} = 0 & Maxwell-\phi \\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) & Maxwell-Ampère \end{cases}$$

Relations champs/sources

Structure du champ

Avec ε_0 permittivité du vide $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\ 10^9$ u.s.i. ($\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$)

μ_0 perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ u.s.i.

Comprendre

- Les équations de Maxwell - Gauss et Maxwell - Faraday relient les ***champs*** $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à leurs ***sources*** (les charges volumiques ρ et les courants volumiques $\vec{j}$).
- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont ***couplés*** (équations de M-F et M-A) : un champ électrique *variable* donne naissance à un champ magnétique et réciproquement (structure du champ)
- Les équations de Maxwell sont *linéaires* : toute combinaison linéaire de solutions est solution (théorème de superposition).
- En régime permanent, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont découplés.
- Le terme $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans M-A, parfois appelé ***courant de déplacement*** et noté $\vec{j}_d$, est nécessaire pour assurer la compatibilité des équations de Maxwell et la conservation de la charge.

Forme intégrale des équations de Maxwell

Équation de ***Maxwell-Gauss*** $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	***Théorème de Gauss*** $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\iiint_V \rho\, d\tau}{\varepsilon_0}$ *S* ***surface fermée*** surface limitant le volume *V*
Équation de ***Maxwell-Faraday*** $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	***Loi de Faraday*** *: induction (Neumann)* $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ Où $e = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \neq 0$ (f.e.m) et $\phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ *S* surface posée sur le ***contour fermé*** *C*
Équation de Maxwell-ϕ $div\vec{B} = 0$	***Conservation du flux magnétique*** $\phi = \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ Conservation du flux dans un tube de champ (lignes de champ resserrées = *B* augmente) ϕ est indépendant de la surface *S* choisie
Équation de ***Maxwell-Ampère*** $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$	***Théorème d'Ampère généralisé*** $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \vec{j}_d\right)\cdot d\vec{S}$ où $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ *S* surface posée sur le contour ***fermé*** *C*

Énergie électromagnétique

Puissance fournie par un champ électromagnétique à des porteurs de charges

La puissance volumique fournie par un champ électromagnétique à des porteurs de charges est :

$$\frac{dP}{d\tau}=\vec{j}\cdot\vec{E}\quad(>0 \text{ ou } <0)\ \text{en Wm}^{-3}\quad\text{et}\quad \mathcal{P}_J=\iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau\quad\text{en W}$$

Cas particulier du ***conducteur ohmique*** :

Pour un conducteur ohmique, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont reliés par la ***loi d'Ohm locale***, analogue aux lois de Fick et de Fourier (relation linéaire cause / effet) : $\vec{j}=-\sigma\,\overrightarrow{grad}V$ soit $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ où σ est la ***conductivité*** (notée également γ) en Sm^{-1} ($\sigma = 1/\rho$ où ρ est la résistivité en Ωm).

D'où $\frac{dP}{d\tau}=\sigma E^2=\frac{j^2}{\sigma}>0$ en Wm^{-3} et $\mathcal{P}_J=\iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau=\iiint_V \sigma\vec{E}^2\,d\tau$ (effet Joule).

Équation locale de Poynting

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t}+div\,\vec{\Pi}=-\vec{j}\cdot\vec{E}\qquad(\textbf{Wm}^{-3})$$

- $\vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ vecteur densité volumique de puissance ou ***vecteur de Poynting*** (**Wm^{-2}**).
- $u_{em}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}$ ***densité volumique d'énergie électromagnétique*** (**Jm^{-3}**).

Comprendre

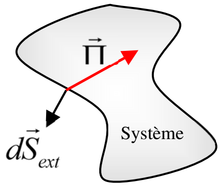
L'équation locale de Poynting traduit un bilan de puissance volumique.
Le terme dans le membre de droite est un terme-source (cf. phénomènes de transport).
Le membre de droite représente la puissance fournie par les charges au champ électromagnétique.

Puissance reçue

Puissance reçue par un système de volume V limité par une surface S :

$$\mathcal{P}_{\substack{entrante\\ ext\to V}}=\iint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{P}_{\substack{\text{sortante}\\ V\to ext}}=\iint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}_{ext}=-\mathcal{P}_{\substack{\text{entrante}\\ ext\to V}}$$



1er cas : $d\vec{S}$ orientée vers l'intérieur du système $\Leftrightarrow$ flux entrant, ***puissance entrante*** : convention thermodynamique (convention du porte-monnaie) ;

2ème cas : $d\vec{S}_{ext}$ orientée vers l'extérieur du système $\Leftrightarrow$ flux sortant, ***puissance sortante*** (théorème de Green-Ostrogradski par exemple).

Comprendre

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface S est égal à la puissance qui traverse S.

Bilan macroscopique

$$\frac{dU_{em}}{dt}=-\iint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}_{ext}-\iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}d\tau=\mathcal{P}_{\substack{entrante\\ ext\to V}}+\mathcal{P}_{\substack{source\\ PdC\to champ}}$$

où $d\vec{S}$ est orientée vers *l'extérieur* du volume V

$U_{em}=\iiint_V u_{em}d\tau$ (énergie électromagnétique dans le volume V).

Comprendre

Le 1er terme du bilan (dU_{em}/dt) représente ***la variation d'énergie électromagnétique du système*** au cours du temps.
Le 2ème terme (flux du vecteur de Poynting) représente ***les échanges aux frontières du système*** (sur la surface S le délimitant) : puissance entrante.
Le 3ème terme (intégrale volumique) représente ***les échanges avec les charges mobiles à l'intérieur du système*** (terme de source, cf. phénomènes de transport) : puissance fournie par les porteur de charges au champ électromagnétique.
Sens des échanges et signes :

Si $\vec{\Pi}$ est de même sens que $d\vec{S}_{ext}$, alors une puissance est rayonnée vers l'extérieur du volume V :

$\vec{\Pi}\cdot d\vec{S}_{ext}>0\Rightarrow dU_{em}/dt<0$, l'énergie contenue dans le volume V diminue.

Éclairement énergétique ou intensité en optique (OPPH)

$I(M)=\left\langle\left\|\vec{\Pi}(M,t)\right\|\right\rangle_{tps}$ proportionnel à E_0^2 (carré de l'amplitude du champ électrique, cf. chapitre ondes électromagnétiques dans le vide).

$I=\left\langle\left\|\vec{\Pi}\right\|\right\rangle$ en Wm^{-2}.