Résumé

Écoulements visqueux

Viscosité : loi de Newton (fluides Newtoniens)

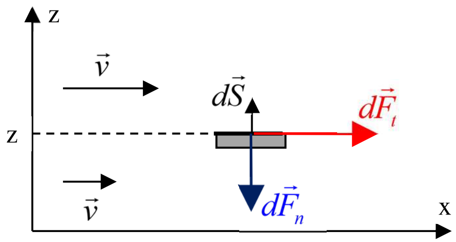
Définition

Écoulement unidimensionnel $\vec{v} = v_x(z)\,\vec{e}_x$.

Actions du fluide situé *au-dessus* de dS sur le fluide situé en dessous (aire grisée) :

- normale $d\vec{F}_n = -P(M)\,d\vec{S}$;
- tangentielle $d\vec{F}_t = \eta \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\,dS\,\vec{e}_x$.

Avec $d\vec{S} = dxdy\,\vec{e}_z$ élément de surface d'ordonnée z.



P(M) est le ***champ de pression*** (inconnu a priori).

Attention, P(M) dépend du mouvement : il n'est pas le même en statique et en dynamique.

η est la ***viscosité dynamique*** en *Pa s* ou ***Poiseuille*** (*1* ***Pl*** *= 1 kgm*$^{-1}$*s*$^{-1}$), $\eta = \eta(P, T)$.

$d\vec{F}_t = \eta \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\,dS\,\vec{e}_x$ (loi de Newton) est la ***force de viscosité pour les fluides Newtoniens*** :

- non nulle si la vitesse est *inhomogène* ($\partial v_x/\partial z \neq 0$ les différentes tranches de fluide n'avancent pas à la même vitesse) ;
- nulle si la vitesse est homogène ($\partial v_x/\partial z = 0$).

Propriétés

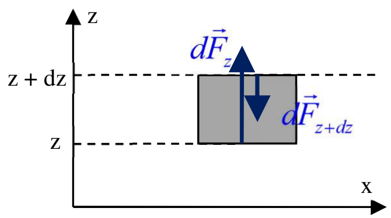
Le sens des forces de viscosité est tel qu'il tend à homogénéiser le champ des vitesses (augmenter la vitesse du fluide sous dS, diminuer la vitesse du fluide au-dessus de dS sur le schéma) et l'intensité dF_t des forces de viscosité est proportionnelle à $\partial v_x/\partial z$ (gradient vertical de v_x).

On retrouve donc les caractères généraux des **phénomènes diffusifs**.

Les forces de viscosité engendrent un transfert de quantité de mouvement entre les couches, des zones rapides vers les zones lentes, qui tend à rétablir l'homogénéité de la vitesse dans l'écoulement.

Forces volumiques de viscosité pour un écoulement incompressible

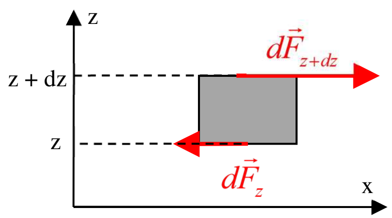
Contraintes normales : pression



$$\vec{f}_{pres\ vol} = \frac{d\vec{F}_{pres}}{d\tau} = -\overrightarrow{grad}P$$

Résultante *volumique* (*Nm*$^{-3}$) des forces de pression

Contraintes tangentielles : viscosité



$$\vec{f}_{visc\ vol} = \frac{d\vec{F}_{visc}}{d\tau} = \eta\,\Delta\vec{v} \quad \text{(fluide \underline{incompressible})}$$

Résultante *volumique* (*Nm*$^{-3}$) des forces de viscosité

Équation de Navier-Stokes – Nombre de Reynolds

Théorème de la résultante dynamique appliquée à une ***particule fluide de volume*** $d\tau$ (de masse $dm = \mu d\tau$) dans un référentiel galiléen : $\mu d\tau\,\vec{a} = \mu\vec{g}d\tau - \overrightarrow{grad}P\,d\tau + \eta\Delta\vec{v}\,d\tau + d\vec{F}$ où $d\vec{F}$ désigne les forces autres que les forces de viscosité et les forces de pression.

Équation de Navier-Stokes (fluide ***incompressible***) :

$$\mu\frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = \mu\vec{g} - \overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v} + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

ou

$$\mu\frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\vec{v}\wedge\vec{v}\right) = \mu\vec{g} - \overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v} + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

Interprétation : transport convectif / transport diffusif

- La dérivée convective $\mu(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v} = (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})(\mu\vec{v})$ car μ=cte (fluide incompressible) est liée au déplacement de la particule fluide et traduit un transport de quantité de mouvement $\mu\vec{v}$ lié au mouvement *macroscopique* : on parle de ***transport convectif de la quantité de mouvement***.
- Les termes $\mu\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \eta\Delta\vec{v}$ conduisent à $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \nu\,\Delta\vec{v}$ ou encore $\dfrac{\partial\mu\vec{v}}{\partial t} = \nu\,\Delta(\mu\vec{v})$ car μ=*cte* : ***équation de diffusion de la quantité de mouvement***.

$\nu = \dfrac{\eta}{\mu}$ ***viscosité cinématique*** (*coefficient de diffusion* de la quantité de mouvement en m^2s^{-1}).

$\mu(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$ traduit un transport convectif (macroscopique) de quantité de mouvement.

$\eta\Delta\vec{v}$ traduit un transport diffusif (microscopique) de quantité de mouvement.

Nombre de Reynolds

Soit une situation possédant une *échelle spatiale* **L** et une *vitesse caractéristique* **V**.

$$\mathcal{Re} = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\left\|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})(\mu\vec{v})\right\|}{\left\|\nu\,\Delta(\mu\vec{v})\right\|} = \frac{VL}{\nu} \quad \text{(sans dimension).}$$

$\mathcal{Re} >> 1$: le transport convectif est prépondérant $\left\|\mu(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right\| \gg \left\|\eta\Delta\vec{v}\right\|$.

$\mathcal{Re} << 1$: le transport diffusif est prépondérant $\left\|\mu(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right\| \ll \left\|\eta\Delta\vec{v}\right\|$.

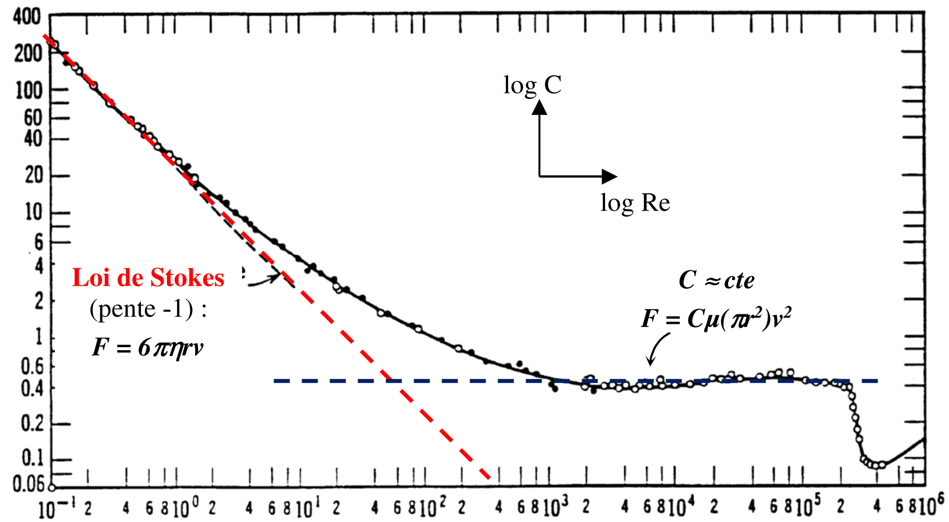
Ordres de grandeur : $\nu_{gaz} \approx D_{th} \approx D \approx 10^{-5}\ m^2s^{-1}$

	Eau	Air	Glycérine
Viscosité dynamique (Pl)	$\eta \sim 10^{-3}\ Pl$	$\eta \sim 10^{-5}\ Pl$	$\eta \sim 1\ Pl$
Viscosité cinématique (m^2s^{-1})	$\nu \sim 10^{-6}\ m^2s^{-1}$	$\nu \sim 10^{-5}\ m^2s^{-1}$	$\nu \sim 10^{-3}\ m^2s^{-1}$
Masse volumique (kgm^{-3})	$\mu \sim 10^{3}\ kgm^{-3}$	$\mu \sim 1\ kgm^{-3}$	$\mu \sim 10^{3}\ kgm^{-3}$

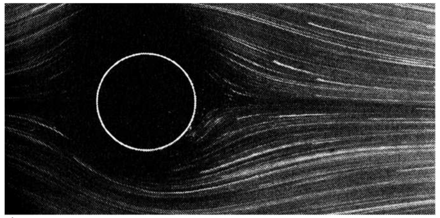
Traînée d'un solide dans un fluide

Soit une sphère de rayon r animée d'une vitesse v par rapport à un fluide de masse volumique μ. La sphère est soumise à une force de frottement fluide, appelée ***force de traînée*** d'intensité : $F = C\mu(\pi r^2)\mathrm{v}^2$ où C est un coefficient sans dimension appelé ***coefficient de traînée*** de l'ordre de 0,1 à 1 qui dépend de l'état de surface de la sphère.

$C = \dfrac{F}{\mu(\pi r^2)v^2}$ est une expression adimensionnée de la force F et $\mathcal{R}e$ est une expression adimensionnée de la vitesse v : le diagramme C($\mathcal{R}e$) est universel (attention, échelles logarithmiques).



Conclusion : force de traînée (drag force) en fonction du nombre de Reynolds



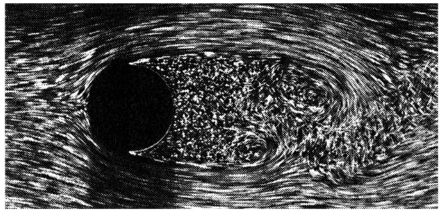
Écoulement ***laminaire (steady flow)*** *(Re ≈ 1)*

$Re < 1$: traînée linéaire en v

$F = 6\pi\eta r v$ (sphère) *Formule de Stokes*

$F = \lambda\eta L v$

(objet de dimension caractéristique L)



Sillage ***turbulent (unsteady flow)*** *(Re = 8000)*

$Re > 10^3$: traînée quadratique en v

$F = C\mu\pi r^2 v^2$ (sphère)

$F = C\mu S v^2$

(objet de section S)

Autre interprétation de *Re* : $Re = \dfrac{\mathrm{v}L}{\nu} = \dfrac{\mu \mathrm{v} L}{\eta} = \dfrac{\mu L^2 \mathrm{v}^2}{\eta L \mathrm{v}} = \dfrac{[C\mu S \mathrm{v}^2]}{[\lambda \eta L \mathrm{v}]}$

Re < 1 **: traînée de la forme $F = \lambda\eta L v$** ***Re > 10³*** **: traînée de la forme $F = C\mu S v^2$**

(Photographies : Hydrodynamique physique, E. Guyon, J-P Hulin et L. Petit, EDP, CNRS Éditions.)

Modélisation des écoulements

Modèle de l'écoulement parfait

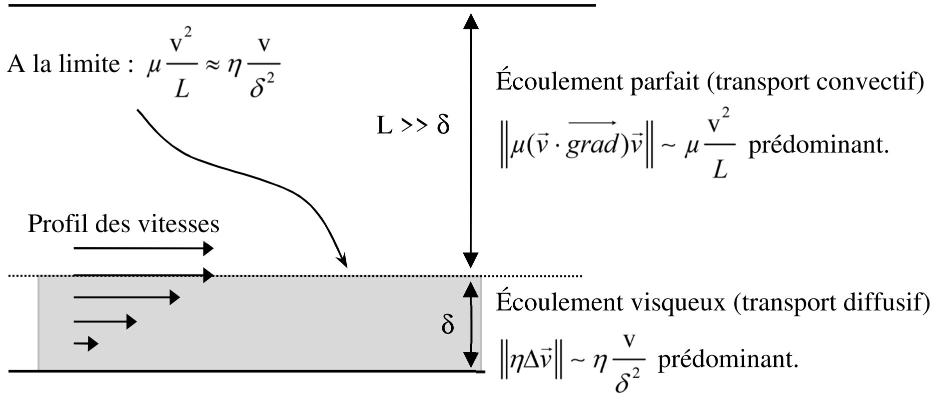
Tous les *phénomènes diffusifs sont négligeables* (viscosité, diffusion thermique) donc écoulement adiabatique et réversible car pas de causes d'irréversibilité (frottements) : l'écoulement est ***isentropique***.

Problème : ce modèle ne permet d'interpréter la nullité de la vitesse du fluide au contact d'un obstacle fixe (due à la viscosité négligée).

Modèle de la couche limite (boundary layer)

Un problème réel peut souvent se décomposer en deux situations distinctes :

- un écoulement parfait hors d'une couche limite d'épaisseur δ localisée au voisinage des obstacles (parois…) pour lequel on fera l'approximation $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ sur l'obstacle (en négligeant δ devant les dimensions de l'écoulement) ;
- un écoulement visqueux dans la couche limite pour lequel $\vec{v} = \vec{0}$ sur l'obstacle.



A la frontière entre la couche limite et l'écoulement parfait, les termes convectif et diffusif sont du même ordre de grandeur.

On en déduit : $\dfrac{\delta}{L} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e}}$.

Complément : fluides non Newtoniens (d'après Wikipédia) :

Un fluide est dit non newtonien lorsque les déformations ne sont pas reliées linéairement aux contraintes visqueuses. Autrement dit, lorsque sa vitesse de déformation (ou taux de cisaillement) n'est pas directement proportionnelle à la force qu'on lui applique. Le meilleur exemple est celui du sable mouillé en bord de mer : quand on frappe le sable, il a la viscosité élevée d'un solide, alors que lorsqu'on appuie doucement dessus, il se comporte comme une pâte. Un autre exemple typique est un mélange épais d'eau et de *Maïzena* (fécule de maïs), dans lequel une main entre aisément à faible vitesse, mais ne peut rentrer à grande vitesse.