Résumé

Cinématique des fluides

Description d'un fluide

Approximation des milieux continus – Particule fluide

Particule de fluide = élément de fluide de volume $V = d^3$ tel que sa taille d (*dépend du problème* mais typiquement de l'ordre de 0,1 µm) soit :
- très petite devant les ***échelles de longueur macroscopiques caractéristiques L*** de l'écoulement (largeur d'un canal, rayon d'un tube, taille d'un obstacle) ;
- très grande devant ***le libre parcours moyen ℓ*** des molécules.

Particule fluide : $\ell \ll d \approx 0{,}1\ \mu m \ll L$.

Lorsque le modèle de particule fluide est utilisable, le fluide peut être décrit comme un ***milieu continu*** : *la vitesse locale du fluide est la moyenne des vitesses des molécules situées à l'intérieur de la particule fluide* (indépendante de d dès que $d \gg \ell$).
En général $L \gg \ell$ mais il existe des exceptions (gaz sous très faible pression), de tels milieux ne peuvent pas être considérés comme des milieux continus.

Évolution d'une particule fluide

La divergence du champ des vitesses est égale au taux de variation relative du volume de la particule fluide en M (admis) :

$$div\,\vec{v} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \quad (V = \textit{volume} \text{ de la particule fluide})$$

Le **vecteur tourbillon** $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$ décrit la rotation locale des particules fluides.

Cf. exercice « Evolution d'une particule fluide ».

Description lagrangienne et eulérienne

Le mouvement d'un fluide dans un référentiel $\mathcal{R}$ est décrit par l'ensemble des *vecteurs vitesse* de ses particules de fluide.
Il existe ***deux façons*** de décomposer le fluide en particules de fluide :
- à l'instant initial t_0 (méthode lagrangienne) ;
- à l'instant t (méthode eulérienne).

Dans la description ***lagrangienne***, on *suit une particule au cours de son mouvement*.
Une particule donnée est caractérisée par sa position $\vec{r}_0$ à un instant de référence t_0.
La vitesse du fluide est alors caractérisée par le vecteur $\vec{V}(\vec{r}_0, t)$ qui est fonction des 2 variables $\vec{r}_0$ et t.

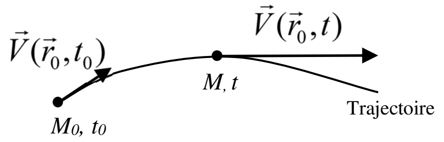


Photo en ***pose longue*** d'un traceur émis pendant un ***temps très court en un point*** : **trajectoire**.

Le point de vue lagrangien correspond à des mesures faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement (système fermé) (ballons sondes dans l'atmosphère, particules marquées).
À l'instant t_0, le fluide est découpé en particules de fluides centrées sur un ensemble de points M_0 liées chacune à un observateur : en un point M fixe de l'espace l'observateur change au cours du temps.
Dans cette description, les lois de la mécanique s'écrivent simplement mais les contraintes imposées au fluide (conditions aux limites) s'expriment plus difficilement car elles sont données en des points fixes de l'espace.

Dans la description ***eulérienne***, le fluide constitue un *champ de vecteurs* $\vec{v}(\vec{r},t)$ (vitesse d'une particule fluide qui coïncide à t avec le point *fixe* M de l'espace), fonction des 2 variables $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et t.

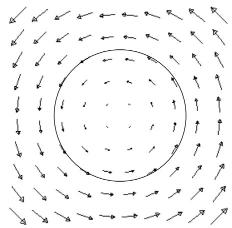


Photo en ***pose courte*** d'un ***ensemble de particules*** marquées : **lignes de courant**.

Le point de vue eulérien est celui d'un observateur au repos et correspond à des mesures faites avec des sondes fixes.
À chaque instant t, le fluide est découpé en particules de fluides centrées sur un ensemble de points M : $\vec{v}(\vec{r},t)$ est le vecteur vitesse de la particule de fluide qui passe en M à t.
À deux instants différents, on observe en M les vitesses de particules fluides *différentes*.
À l'instant t', la vitesse au même point M est $\vec{v}(\vec{r},t')$.
Dans cette description les conditions aux limites s'expriment simplement mais l'accélération de la particule fluide est plus compliquée (termes non linéaires).

Dérivée particulaire : expression des lois physiques en description eulérienne

Dérivée particulaire d'une grandeur eulérienne $G(M, t)$ <u>en suivant la particule fluide</u> :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}G$$

Dérivée ***locale***
(influence du temps en M fixe)
Terme $\neq 0$ si écoulement non <u>stationnaire</u>

Dérivée ***convective***
(influence du déplacement)
Terme $\neq \vec{0}$ si écoulement non <u>uniforme</u>

Rq : la dérivée particulaire est un concept lagrangien qui permet donc de formuler les lois physiques, appliquées à des grandeurs eulériennes, sous leurs formes habituelles (cf. ci-dessous accélération).

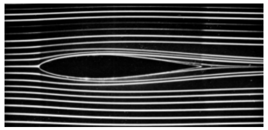
Exemple : dérivée particulaire du champ de masse volumique : $\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\mu$.

Dérivée particulaire du champ de vitesse = accélération de la particule fluide :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\ .$$

Ou encore : $$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$$

***Attention** : régime stationnaire* $\cancel{\Rightarrow}$ $\vec{a} = \vec{0}$



Lignes de champ resserrées $\Rightarrow$ vitesse plus grande dans un fluide incompressible).

Attention : $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$ *ne s'exprime simplement qu'en <u>coordonnées cartésiennes</u>.*

$$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v} = (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})v_x\vec{e}_x + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})v_y\vec{e}_y + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})v_z\vec{e}_z$$

Ne pas généraliser aux coordonnées cylindriques ou sphériques !

Conservation de la masse

Débit volumique et débit massique

Débit volumique

Volume δV de fluide traversant une surface orientée entre les instants t et $t+dt$:

$$D_v = \frac{\delta V}{dt} = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} \quad \text{en m}^3\text{s}^{-1}.$$

Notations du cours de thermodynamique : $\boldsymbol{D_V = \Phi_V}$ est un ***flux*** ou un courant de volume.

Débit massique

Masse δm de fluide traversant une surface orientée entre les instants t et $t+dt$:

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_S \mu\vec{v}\cdot d\vec{S} \quad \text{en kgs}^{-1}.$$

Où $\vec{j} = \mu\vec{v}$ est le vecteur densité de flux de masse en $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Notations du cours de thermodynamique : $\boldsymbol{D_m = \Phi_m}$ est un ***flux*** ou un courant de masse.

Équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$$

Conditions aux limites sur un obstacle

***Obstacle fixe** : **la vitesse est tangente à l'obstacle**.*

$D_V = 0$ à travers la surface Σ de l'obstacle donc $\vec{v} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{n} = 0$.

Obstacle mobile ou déformable** : **la vitesse <u>relative</u> est tangente à l'obstacle

$D_V = 0$ à travers la surface Σ de l'obstacle donc $\vec{v}_{relative} = \vec{v} - \vec{v}_\Sigma \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{n} = \vec{v}_\Sigma\cdot\vec{n}$.

Utilisable également à l'interface de deux liquides non miscibles.

Modèles d'écoulements et propriétés

Écoulement stationnaire

Définition

Les champs eulériens $\vec{v}(M,t)$, $P(M, t)$, $\mu(M, t)$ sont ***indépendants du temps*** :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}\,,\ \frac{\partial P}{\partial t} = 0\,,\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0\,.$$

Attention : dépend du référentiel d'étude.

Propriétés

Écoulement stationnaire $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$:

Conservation de la masse $\Rightarrow$ $div\,\vec{j} = 0$: $\vec{j}$ est à ***flux conservatif***.

$\Rightarrow$ ***Conservation du débit massique D_m dans un tube de champ : $\mu Sv = cte$***.

$\Rightarrow$ ***Loi des nœuds pour le débit massique : $\Sigma D_{mi} = 0$***.

Écoulement tourbillonnaire / irrotationnel

Écoulement tourbillonnaire : $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$

Écoulement irrotationnel ou potentiel : $\vec{\Omega} = \vec{0}$

Il existe alors un potentiel des vitesses ϕ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\,\phi$.

Attention : dépend du référentiel d'étude.

Fluide incompressible

Définition

La masse volumique du fluide est constante : $\mu = cte$.

Écoulement incompressible

Définition

Le volume des particules fluides est constant au cours de leur déplacement :

$$div\,\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{D\mu}{Dt} = 0\,.$$

Attention : le fluide peut être compressible et l'écoulement incompressible.

Modèle valable pour les fluides incompressibles mais aussi pour les gaz en écoulement stationnaire à $v \ll c_{son}$.

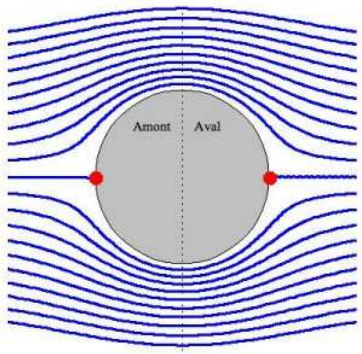
Propriétés

$div\,\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{v}$ ***est à flux conservatif***.

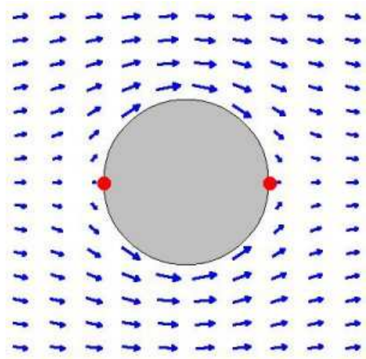
$\Rightarrow$ ***Conservation du débit volumique D_V dans un tube de champ : $Sv = cte$***.

$\Rightarrow$ ***Loi des nœuds pour le débit volumique : $\Sigma D_{Vi} = 0$***.

$\Rightarrow$ ***Lignes de champ resserrées = vitesse plus grande***.



Lignes de courant



Champ des vitesses

http://images.math.cnrs.fr/Quand-les-maths-donnent-des-ailes.html

Écoulement irrotationnel incompressible

Propriétés

Le potentiel des vitesses vérifie l'***équation de Laplace*** : $\Delta\phi = 0$.

Cette équation possède une solution unique dès que les ***conditions aux limites sont connues***.

Synthèse

	$div\,\vec{j}$	$div\,\vec{v}$
Écoulement stationnaire		
Fluide incompressible		
Écoulement incompressible		