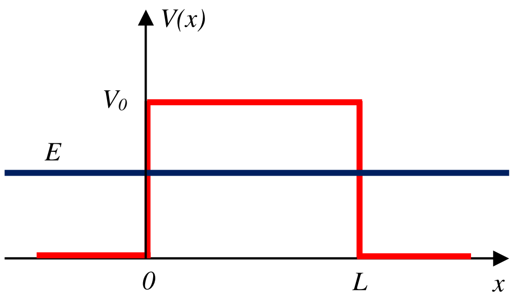
Barrière de potentiel - Effet tunnel – Exercice n°1

On envisage une ***barrière de potentiel*** de hauteur V_0 et de largeur L et on se limite au cas d'une particule incidente d'énergie inférieure à V_0.
Le potentiel est défini par morceaux :

- domaine 1 : $V(x<0)=0$;
- domaine 2 : $V(0<x<L)=V_0$;
- domaine 3 : $V(x>L)=0$.



On considère une particule incidente se déplaçant initialement selon les x croissants dans le domaine 1.

En ***mécanique classique***, $E = E_C + V_0 > V_0 \Rightarrow$ la particule ne peut pas se trouver dans le domaine 2 : une particule incidente rebondit sur la barrière.

En ***physique quantique***, on cherche un état stationnaire d'énergie E.

On définit le ***coefficient de transmission T*** de la barrière de potentiel, comme le rapport du ***courant de probabilité transmis*** sur le ***courant de probabilité incident*** :

$$T = \frac{j_{Tr}}{j_{in}}.$$

On appelle ***vecteur courant de densité de probabilité*** associé au paquet d'onde $\psi(M,t)$ le vecteur : $\vec{j} = |\psi|^2\,\vec{v}_g = \dfrac{|\psi|^2\,\hbar k}{m}\vec{e}_x$.

La probabilité pour cette particule de vitesse $\vec{v}_g$ de se trouver en x entre l'instant t et l'instant $t+dt$ est donc $dP = \vec{j}(x,t)\cdot\vec{e}_x\,dt$

Comprendre

Ce courant est analogue aux courants définis en thermodynamique et en mécanique des fluides : $\vec{j} = \rho\vec{v} = \dfrac{dm}{d\tau}\vec{v} \leftrightarrow \vec{j} = |\psi|^2\,\vec{v}_g = \dfrac{dP}{d\tau}\vec{v}_g$.

Il existe une équation de conservation de la probabilité.

1.1. Rappeler l'équation de Schrödinger dans un potentiel $V(x)$ uniforme par morceaux.

1.2. On note $\varphi(x)$ la partie spatiale de la fonction d'onde ψ dans un état stationnaire, rappeler l'équation de Schrödinger pour $\varphi(x)$.

1.3. Donner la forme des solutions pour $\varphi(x)$ dans chacun des trois domaines (sous forme exponentielle réelle ou complexe suivant le domaine considéré).

On posera $k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\alpha = \sqrt{\dfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$.

Tenir compte du fait que, dans le domaine 3, la particule ne revient pas de l'infini (les solutions font donc apparaître 5 coefficients et non 6).

1.4. De combien de relations de continuité dispose-t-on (continuité de φ et $d\varphi/dx$) ? Combien a-t-on d'amplitudes inconnues ?

1.5. Dans ce type de situation, on calcule un coefficient de transmission ; montrer que $T = \dfrac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$.

1.6. On admet que, sous l'hypothèse $\alpha L >> 1$: $T = \dfrac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-\frac{2L\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}$.

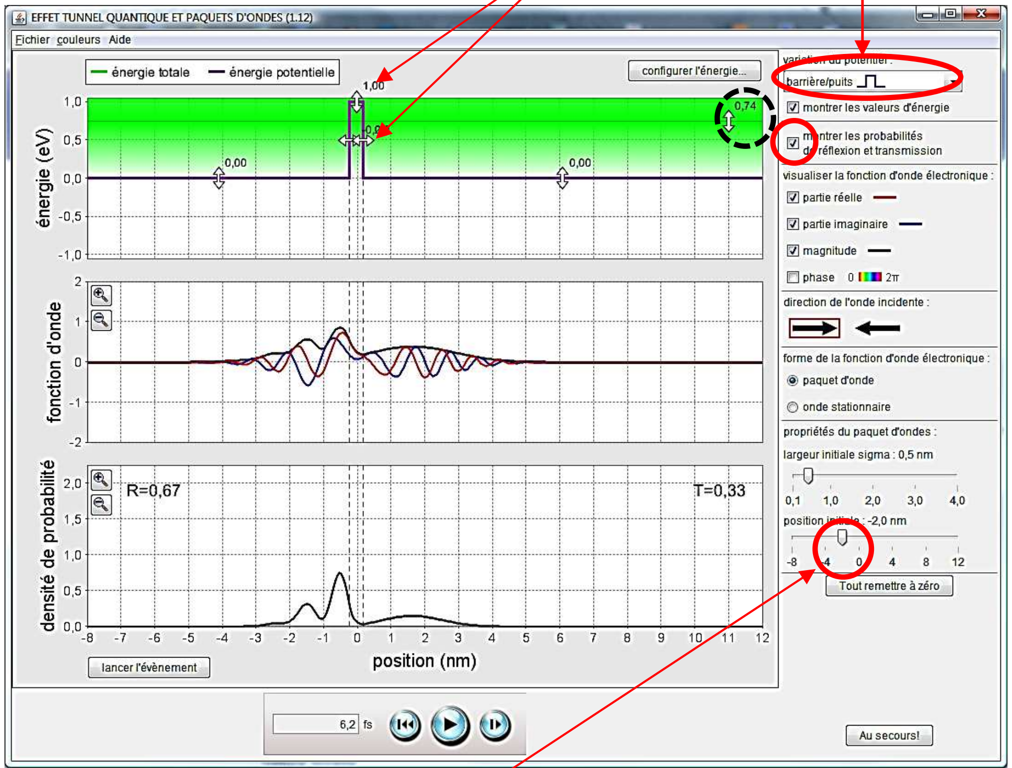
Commenter cette expression.

1.7. On montre facilement (en étudiant la fonction $f(E) = \dfrac{E(V_0-E)}{V_0^2}$) que le préfacteur de l'exponentielle est maximal pour $E = V_0/2$ et on a alors, en ***ordre de grandeur*** : $T \approx e^{-2L/\delta}$ où $\delta \approx \dfrac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0-E)}}$. Commenter ces résultats.

Simulation https://phet.colorado.edu/fr/simulation/legacy/quantum-tunneling

Réglages

Choisir un potentiel barrière/puits et utiliser les curseurs de façon à créer une barrière.



Placer le paquet d'onde à l'abscisse -2.

Afficher les coefficients de réflexion et transmission.

Observer l'influence de l'épaisseur de la barrière ainsi que celle de l'énergie du paquet d'onde sur le coefficient de transmission T (curseur entouré par une ellipse en pointillés).