Écoulement de Poiseuille (écoulement laminaire dans un tube cylindrique)

Énoncé type QC – Oral – 5/2

Le rapport des débits (reflété par les volumes contenus dans les éprouvettes) est de *16* alors que le diamètre du tube de droite est le double de celui de gauche.

Expliquer sachant que les deux écoulements résultent de la même différence de pression.

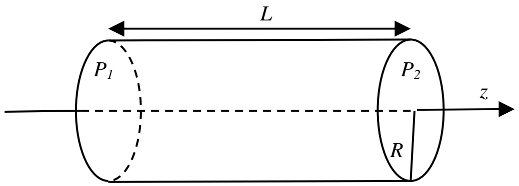
Que vaudrait le rapport des débits en l'absence de viscosité ? Réponse au prochain chapitre…

Photo : E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit. Ce que disent les fluides. Belin Pour la Science.

Énoncé détaillé

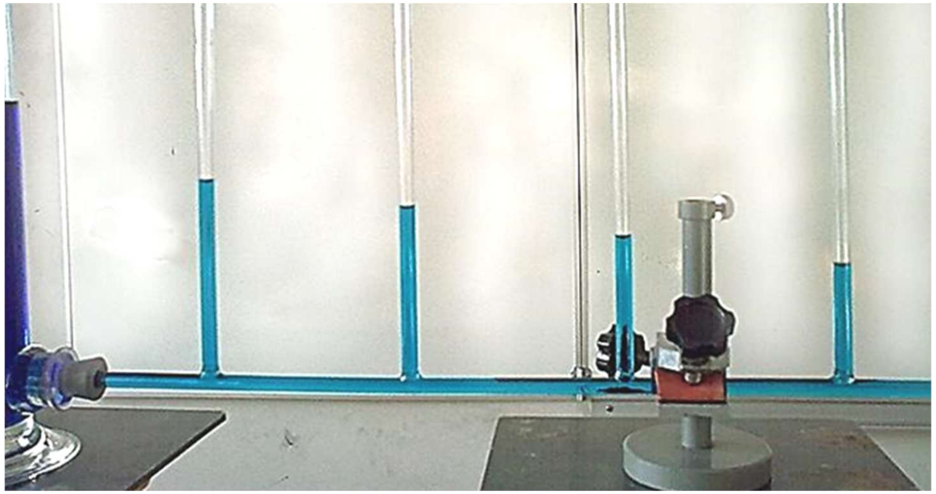
Modélisation

Un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique μ s'écoule en régime stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique d'axe Oz, de longueur L et de rayon R.



Les pressions aux extrémités de la conduite sont P_1 en amont ($z=0$) et P_2 en aval ($z=L$).
La pesanteur est négligée dans tout le volume du tube.

1. **Analyse physique**
   Sans rechercher une expression mathématique, proposer une allure plausible pour le champ des vitesses dans le tube : représenter l'allure des vecteurs vitesse dans un plan de coupe contenant l'axe Oz. Que peut-on prévoir quant à la vitesse au centre du tuyau ? Représenter l'allure de la courbe $v(r)$ à z fixé en tenant compte de cette remarque.
2. **Symétries et invariances**
   Proposer des formes a priori pour les champs des vitesses et des pressions compte tenu des symétries et invariances du problème.
3. **Caractéristiques de l'écoulement – Propriétés locales**
   Montrer que l'une des hypothèses permet de préciser le champ des vitesses.
   En utilisant l'analyse effectuée à la question 1, prévoir si cet écoulement est rotationnel ou irrotationnel.
4. **Équation de Navier-Stokes**
   - 4.1. Démontrer que le champ des accélérations est nul.
   - 4.2. Rappeler l'équation de Navier-Stokes.
   - 4.3. En déduire que la pression P ne dépend pas de r.
   - 4.4. Déduire de l'équation de Navier-Stokes que dP/dz est une constante C. Établir l'expression de $P(z)$ en fonction des données du problème.
   - 4.5. Déduire des questions précédentes l'équation différentielle dont $v_z(r)$ est solution. Expliciter $v_z(r)$ en utilisant le fait que dv_z/dr est bornée.
   - 4.6. Reprendre les tracés de la question 1 à la lueur des résultats des calculs.
5. **Applications**
   - 5.1. Notion de ***perte de charge*** : interpréter la photographie ci-dessous.



Expérience de cours

   - 5.2. ***Débit***
     Établir l'expression du débit volumique D_V en fonction des pressions P_1 à l'entrée et P_2 à la sortie de la conduite.
     Interpréter les résultats accompagnant la photographie dans l'encadré (énoncé court).
   - 5.3. ***Analogie hydraulique / électrique***
     Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique, introduire une résistance hydraulique $\mathcal{R}$ et l'exprimer en fonction de η, R et L. Comparer l'influence du rayon R sur la résistance électrique et sur la résistance hydraulique et commenter.
   - 5.4. Calculer la chute de pression dans une artère de longueur $L = 1\ m$, de rayon $R = 0{,}5\ cm$ où le débit volumique vaut $D_V = 80\ cm^3s^{-1}$ sachant que la viscosité du sang vaut $\eta = 4\ 10^{-3}\ Pl$. Commenter sachant que le cœur maintient une différence de pression ΔP, symbolisée par « *12-8* », qui vaut $\Delta P = 12 - 8 = 4\ cm\ de\ mercure$. On rappelle que *1 bar = 760 millimètres de mercure*.