

# Ondes sonores longitudinales dans les solides

## Modèle microscopique

Objectif  : Déterminer l'ordre de grandeur du module d'Young  $E$  en fonction de caractéristiques atomiques connues.

Prérequis  : Equation de propagation des ondes sonores dans les solides, module d'Young

Loi de Hooke :  $\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\delta \ell}{\ell_0}$  (allongement relatif proportionnel à la contrainte).

Equation de propagation de l'écart par rapport à la position d'équilibre noté  $\xi$  :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

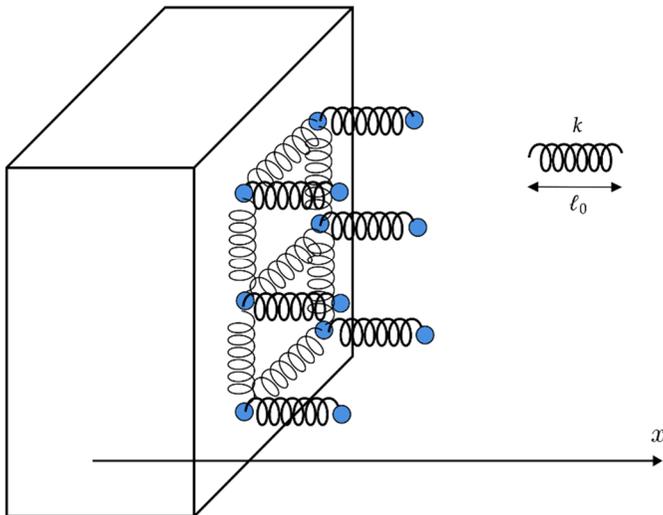
$E$  : module d'Young (Pa) de l'ordre de 100 GPa et  $\mu$  masse linéique ( $\text{kgm}^{-1}$ ).

On montre que, sous contrainte, l'allongement relatif d'un système mésoscopique d'épaisseur  $dx$  est :  $\partial \xi / \partial x$ .

En utilisant la loi de Hooke, on en déduit que la force exercée par le solide situé à droite de la tranche d'épaisseur  $dx$  est :  $\vec{F}(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$ .

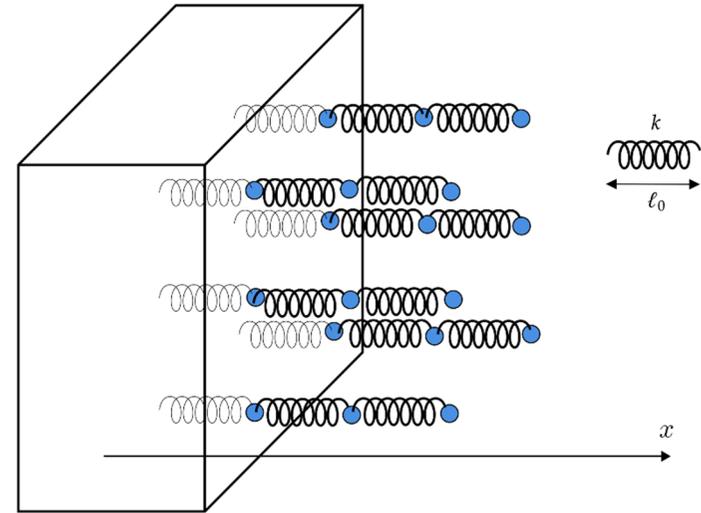
### Modèle

Le solide est assimilé à un empilement régulier d'atomes identiques liés entre eux des **liaisons chimiques** modélisées par des **ressorts de raideur  $k$  et de longueur au repos  $\ell_0$**  (schéma ci-dessous, quelques atomes représentés ainsi que quelques liaisons).



On considère des ondes *longitudinales* donc les seuls mouvements envisagés sont les mouvements colinéaires à l'axe  $Ox$  : toutes les liaisons dans les plans orthogonaux à  $Ox$  peuvent donc être négligées.

Le solide est alors modélisé par des chaînes linéaires d'atomes, indépendantes les unes des autres.



**Pour achever la modélisation du solide, il faut évaluer numériquement les caractéristiques  $k$  et  $\ell_0$ .**

- $\ell_0$  est de l'ordre de grandeur de la taille d'une atome  $\approx 10^{-10}$  m.
- $k$  est reliée, via l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$ , à l'énergie de liaison  $E_\ell$  :  $E_\ell = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$  où la longueur  $\ell$  d'un atome est au maximum de  $2 \ell_0$  (l'atome en question prendrait alors la place de l'atome suivant ou de l'atome précédent) ; on en déduit que  $E_\ell \approx \frac{1}{2} k \ell_0^2 \approx 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . D'où  $k = 2 \frac{E_\ell}{\ell_0^2}$ .

### Force exercée par le solide situé à droite de la tranche d'épaisseur $dx$

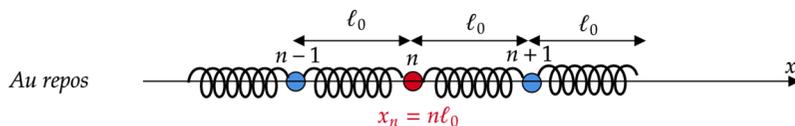
Méthode  : en raisonnant sur une chaîne d'atomes puis sur toutes les chaînes présentes sur une section  $S$  du solide, on cherche l'expression de la force  $\vec{F}(x)$  exercée par le solide situé à droite de la tranche d'épaisseur  $dx$  en fonction de  $k$  et  $\ell_0$ .

En comparant cette nouvelle expression de  $\vec{F}(x)$  à  $\vec{F}(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$ , on pourra évaluer le module d'Young  $E$ .

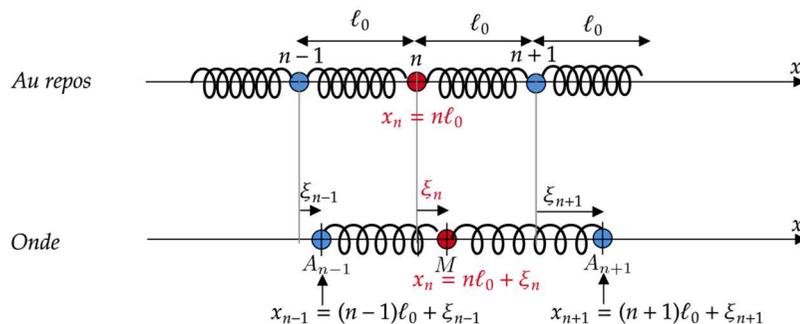
On considère l'atome numéro  $n$  au sein de la chaîne au **repos**, toutes les distances interatomiques sont égales à  $\ell_0$ .

Ainsi l'abscisse  $x_n$  de cet atome au repos est :  $x_n = n \ell_0$ .

De même,  $x_{n-1} = (n-1) \ell_0$  et  $x_{n+1} = (n+1) \ell_0$ .



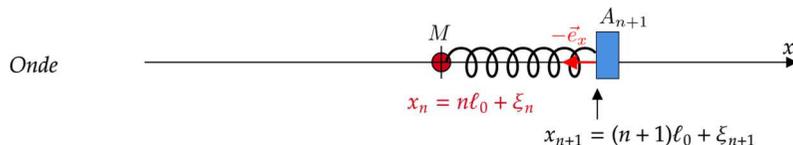
En présence d'une onde de déformation, les atomes s'écartent de leurs positions d'équilibre.



Les abscisses des atomes deviennent :

$$x_n(t) = n \ell_0 + \xi_n(t), \quad x_{n-1}(t) = (n-1) \ell_0 + \xi_{n-1}(t) \quad \text{et} \quad x_{n+1}(t) = (n+1) \ell_0 + \xi_{n+1}(t).$$

Il est alors possible d'exprimer la force exercée par l'atome  $A_{n+1}$  sur l'atome considéré  $M$  :



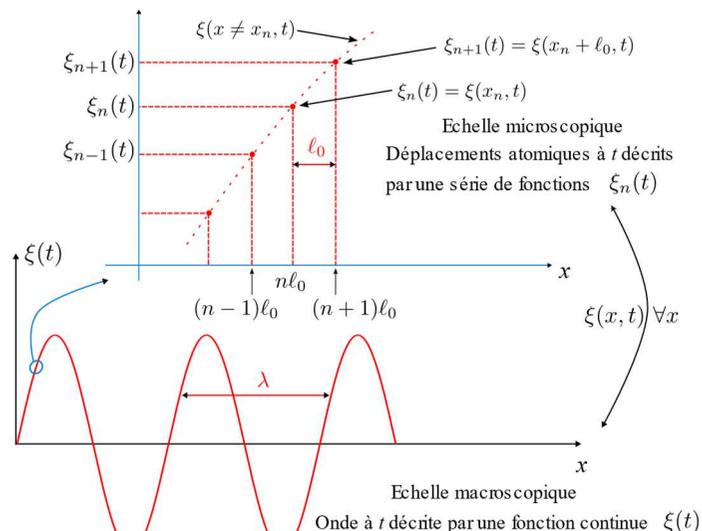
$$\vec{F}_{1 \text{ atome}} = -k(\ell - \ell_0)(-\vec{e}_x) \quad \text{avec} \quad \ell = (n+1)\ell_0 + \xi_{n+1}(t) - (n\ell_0 + \xi_n(t))$$

$$\text{D'où} \quad \vec{F}_{1 \text{ atome}} = k(\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t))\vec{e}_x.$$

A ce stade, il existe une *série* de fonctions  $\xi_n(t)$  définies pour chaque atome (dont la valeur représente le déplacement de l'atome  $n$  au cours du temps par rapport à sa position d'équilibre) mais comme la distance interatomique  $\ell_0$  est très faible devant la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde sonore, il est possible de définir une **fonction continue**  $\xi(x, t)$  qui coïncide avec  $\xi_n(t)$  pour  $x = x_n$  :  $\xi(x, t) = \xi_n(t)$  pour tout  $n$  (comme les valeurs  $x_n$  sont très « proches » les unes des autres à l'échelle de l'onde, il s'agit d'une forme de « prolongement par continuité »).

Ainsi,  $\xi_{n+1}(t) = \xi(x_{n+1}, t) = \xi(x_n + \ell_0, t)$ .

Cette approximation porte le nom d'**approximation des milieux continus**.



Le passage de  $\xi_n(t)$  à  $\xi(x, t)$ , continue, permet d'effectuer un développement limité.

On peut écrire  $\xi_{n+1}(t) = \xi(x_{n+1}, t) = \xi(x_n + \ell_0, t) \approx \xi(x_n, t) + \ell_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$  car  $\ell_0 \ll \lambda$ .

L'expression de la force devient donc  $\vec{F}_{1 \text{ atome}}(x) = k \ell_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$ .

Il reste à déterminer le nombre d'atomes présents dans une section  $S$  du solide.

Si on note  $L$  et  $h$  les longueurs des côtés de la section ( $S = L \times h$ ), on a alors  $L / \ell_0$  atomes sur la longueur  $L$  et  $h / \ell_0$  atomes sur la longueur  $h$  donc  $N = L / \ell_0 \times h / \ell_0 = S / \ell_0^2$  atomes sur la surface  $S$ .

Ainsi la force exercée sur cette surface est :

$$\vec{F}(x) = N \times \vec{F}_{1 \text{ atome}} = \frac{S}{\ell_0^2} k \ell_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$$

Par comparaison avec  $\vec{F}(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$ , on identifie  $E = \frac{k}{\ell_0}$ .

La construction du modèle a donné  $k \approx 2 \frac{E_\ell}{\ell_0^2}$  d'où  $E \approx 2 \frac{E_\ell}{\ell_0^3}$ .

Numériquement,  $E \approx 10$  GPa.

Ce modèle simpliste fournit donc un ordre de grandeur convenable.

**Remarque** : une **analyse dimensionnelle** donne immédiatement que  $E$  est proportionnel à  $\frac{k}{\ell_0}$ .