



# Ondes sonores longitudinales dans les solides

## Modèle microscopique

Objectif  : Déterminer l'ordre de grandeur du module d'Young  $E$  en fonction de caractéristiques atomiques connues.

Prérequis  : Equation de propagation des ondes sonores dans les solides, module d'Young

Loi de Hooke :  $\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\delta \ell}{\ell_0}$  (allongement relatif proportionnel à la contrainte).

Equation de propagation de l'écart par rapport à la position d'équilibre noté  $\xi$  :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

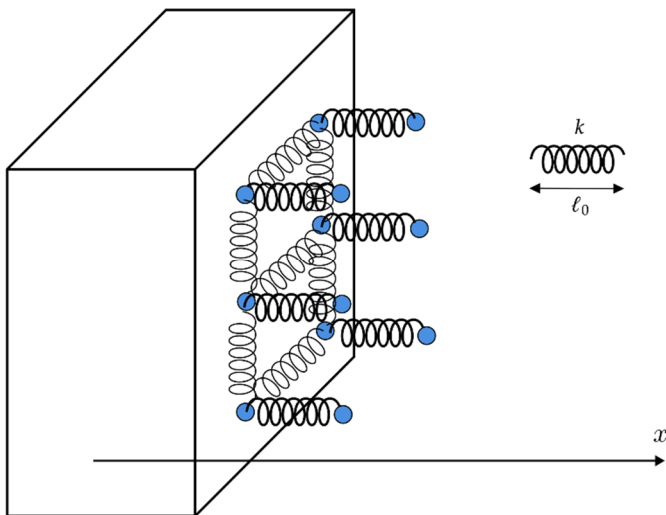
$E$  : module d'Young (Pa) de l'ordre de 100 GPa et  $\mu$  masse linéique ( $\text{kgm}^{-1}$ ).

On montre que, sous contrainte, l'allongement relatif d'un système mésoscopique d'épaisseur  $dx$  est :  $\partial \xi / \partial x$ .

En utilisant la loi de Hooke, on en déduit que la force exercée par le solide situé à droite de la tranche d'épaisseur  $dx$  est :  $\vec{F}(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$ .

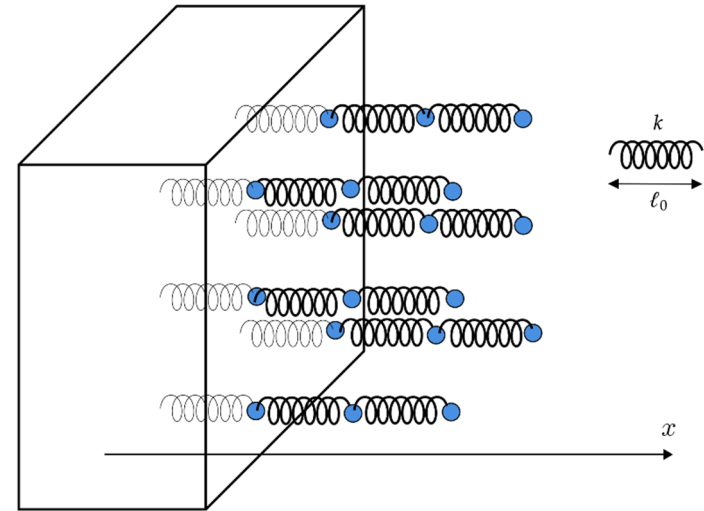
### Modèle

Le solide est assimilé à un empilement régulier d'atomes identiques liés entre eux des **liaisons chimiques** modélisées par des **ressorts de raideur  $k$  et de longueur au repos  $\ell_0$**  (schéma ci-dessous, quelques atomes représentés ainsi que quelques liaisons).



On considère des ondes *longitudinales* donc les seuls mouvements envisagés sont les mouvements colinéaires à l'axe  $Ox$  : toutes les liaisons dans les plans orthogonaux à  $Ox$  peuvent donc être négligées.


Le solide est alors modélisé par des chaînes linéaires d'atomes, indépendantes les unes des autres.



Pour achever la modélisation du solide, il faut évaluer numériquement les caractéristiques  $k$  et  $\ell_0$ .

- $\ell_0$  est de l'ordre de grandeur de la taille d'une atome  $\approx 10^{-10}$  m.
- $k$  est reliée, via l'énergie potentielle élastique, à l'énergie de liaison :  $E_\ell = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$  où la longueur  $\ell$  d'un atome est au maximum de  $2 \ell_0$  (l'atome en question prendrait alors la place de l'atome suivant ou de l'atome précédent) ; on en déduit que  $E_\ell \approx \frac{1}{2} k \ell_0^2 \approx 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ . D'où  $k = 2 \frac{E_\ell}{\ell_0^2}$ .

### Force exercée par le solide situé à droite de la tranche d'épaisseur $dx$

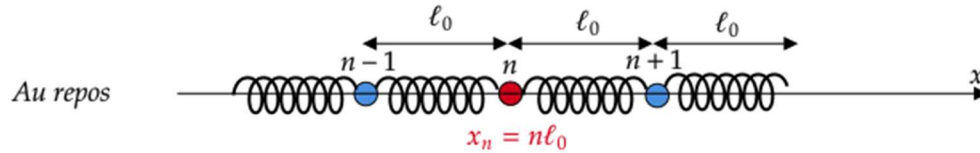
Méthode  : en raisonnant sur une chaîne d'atomes puis sur toutes les chaînes présentes sur une section  $S$  du solide, on cherche l'expression de la force  $\vec{F}(x)$  exercée par le solide situé à droite de la tranche d'épaisseur  $dx$  en fonction de  $k$  et  $\ell_0$ .

En comparant cette nouvelle expression de  $\vec{F}(x)$  à  $\vec{F}(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$ , on pourra évaluer le module d'Young  $E$ .

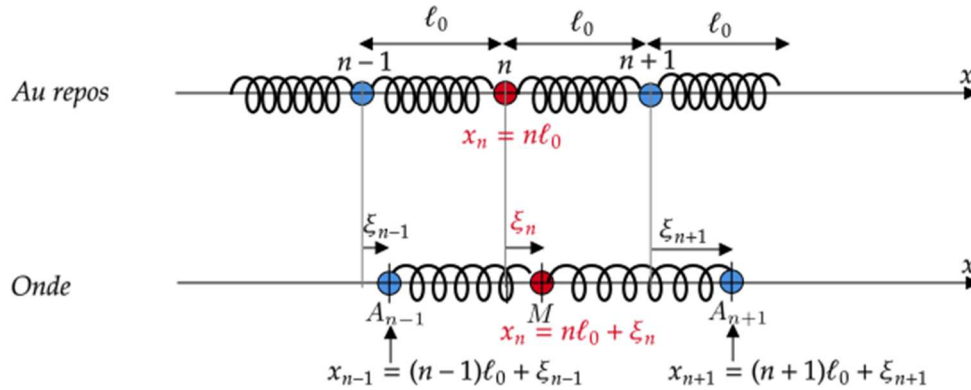
On considère l'atome numéro  $n$  au sein de la chaîne au **repos**, toutes les distances interatomiques sont égales à  $\ell_0$ .

Ainsi l'abscisse  $x_n$  de cet atome au repos est :  $x_n = n \ell_0$ .

De même,  $x_{n-1} = (n-1) \ell_0$  et  $x_{n+1} = (n+1) \ell_0$ .



En présence d'une onde de déformation, les atomes s'écartent de leurs positions d'équilibre.



Les abscisses des atomes deviennent :

$$x_n(t) = n \ell_0 + \xi_n(t), \quad x_{n-1}(t) = (n-1) \ell_0 + \xi_{n-1}(t) \quad \text{et} \quad x_{n+1}(t) = (n+1) \ell_0 + \xi_{n+1}(t).$$

Il est alors possible d'exprimer la force exercée par l'atome  $A_{n+1}$  sur l'atome considéré  $M$  :

$$\vec{F}_{1 \text{ atome}} = -k(\ell - \ell_0)(-\vec{e}_x) \quad \text{avec} \quad \ell = (n+1)\ell_0 + \xi_{n+1}(t) - (n\ell_0 + \xi_n(t))$$

$$\text{D'où} \quad \vec{F}_{1 \text{ atome}} = k(\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t))\vec{e}_x.$$

A ce stade, il existe une *série* de fonctions  $\xi_n(t)$  définies pour chaque atome mais comme la distance interatomique  $\ell_0$  est très faible devant la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde sonore, il est possible de définir une **fonction continue**  $\xi(x, t)$  qui coïncide avec  $\xi_n(t)$  pour  $x = x_n$  :  $\xi(x, t) = \xi_n(t)$  pour tout  $n$  (comme les valeurs  $x_n$  sont très « proches » les unes des autres à l'échelle de l'onde, il s'agit d'une forme de « prolongement par continuité »).

Cette approximation porte le nom d'**approximation des milieux continus**.

$$\text{On peut donc écrire} \quad \xi_{n+1}(t) = \xi(x_{n+1}, t) \approx \xi(x_n + \ell_0, t) \approx \xi(x_n, t) + \ell_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

$$\text{L'expression de la force devient donc} \quad \vec{F}_{1 \text{ atome}}(x) = k \ell_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x.$$

Il reste à déterminer le nombre d'atomes présents dans une section  $S$  du solide.

Si on note  $L$  et  $h$  les longueurs des côtés de la section ( $S = L \times h$ ), on a alors  $L / \ell_0$  atomes sur la longueur  $L$  et  $h / \ell_0$  atomes sur la longueur  $h$  donc  $N = L / \ell_0 \times h / \ell_0 = S / \ell_0^2$  atomes sur la surface  $S$ .

Ainsi la force exercée sur cette surface est :

$$\vec{F}(x) = N \times \vec{F}_{1 \text{ atome}} = \frac{S}{\ell_0^2} k \ell_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$$

Par comparaison avec  $\vec{F}(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x$ , on identifie  $E = \frac{k}{\ell_0}$ .

La construction du modèle a donné  $k \approx 2 \frac{E_\ell}{\ell_0^2}$  d'où  $E \approx 2 \frac{E_\ell}{\ell_0^3}$ .

Numériquement,  $E \approx 10$  GPa.

Ce modèle simpliste fournit donc un ordre de grandeur convenable.

Remarque : une analyse dimensionnelle donne immédiatement que  $E$  est proportionnel à  $\frac{k}{\ell_0}$ .