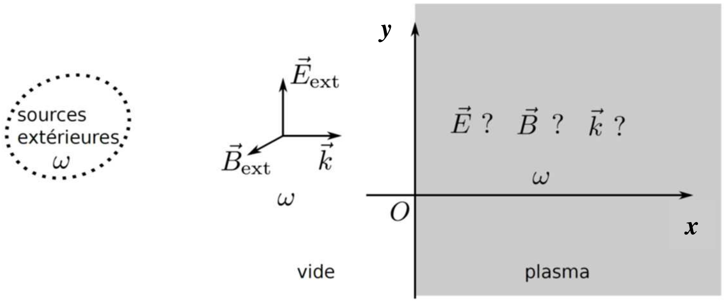
Ondes dans les métaux

Démonstrations du cours

Objectif : déterminer le champ électromagnétique à l'intérieur du métal lorsqu'une onde arrive à l'interface air (vide) / plasma.



1ère partie – Fréquences électroniques - Modélisation du métal dans l'ARQS

Hypothèses et approximations

1. Electrons non relativistes : $v \ll c$.
2. Poids des électrons négligé devant la partie électrique de la force de Lorentz : $P \ll qE$.
3. Force magnétique négligée devant la force électrique dans Lorentz : $\dfrac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.
4. Ions du réseau immobiles.
5. Modèle de Drude : force de frottement sur un électron $-\dfrac{m_e}{\tau}\vec{v}$.
6. Champ $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ de période $T \gg \tau \approx 10^{-14}$ s : le milieu réagit instantanément aux variations du champ aux fréquences électrocinétiques.

1. Densité de charges et densité de courants : cf. chapitre « Conduction électrique »

1.1. Savoir retrouver la loi d'Ohm locale $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\underline{\vec{E}}$ et l'expression de la conductivité réelle

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$$ en utilisant la deuxième loi de Newton appliquée à un électron.

Dans le cadre de l'hypothèse $T \gg \tau \approx 10^{-14}$ s, montrer que $\underline{\sigma} \approx \sigma_0$.

1.2. Savoir prouver que la neutralité du métal $\rho = 0$ est atteinte en un temps très inférieur à τ en écrivant l'équation différentielle en ρ issue de l'équation de Maxwell-Gauss, de l'équation de conservation de la charge et de la loi d'ohm locale.

2. Relation de dispersion pour une pseudo-OPPH ($\underline{k}$ complexe)

2.1. Etablir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma_0$ pour un métal de conductivité σ_0 en utilisant les équations de Maxwell et la loi d'Ohm locale.

2.2. Evaluer en ordre de grandeur les deux termes $(\omega/c)^2$ et $\omega\mu_0\sigma_0$ dans le domaine de validité de la loi d'Ohm locale avec une conductivité réelle.
Simplifier en conséquence l'équation de dispersion.

2.3. Montrer que $\underline{k}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{k} = \pm\dfrac{1-j}{\delta}$; rappel : $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Exprimer δ en fonction de μ_0, σ et ω.

3. Effet de peau

3.1. En considérant un champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\,\vec{e}_y$ dans le demi-espace infini $x > 0$ (pseudo-OPPH de vecteur d'onde complexe), montrer que l'une des deux solutions précédentes pour $\underline{k}$ est à rejeter et donner l'expression de l'onde sous forme réelle.
Justifier l'appellation « ***épaisseur de peau*** » pour δ.

3.2. Applications numériques : calculer δ dans le cuivre à 50 Hz et à 5 GHz et comparer au diamètre des fils utilisés en TP.

3.3. Comparer $\|\vec{j}\|$ et $\left\|\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\|$ en ordre de grandeur dans le domaine de fréquences considéré puis établir que $\Delta\vec{E} - \mu_0\sigma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$. Commenter ce résultat.

3.4. Montrer que l'épaisseur de peau δ s'interpréter comme une distance caractéristique de diffusion de la forme $\sqrt{D\tau}$ où D est un coefficient de diffusion.
Exprimer D et préciser quelle grandeur joue ici le rôle de τ.

4. Interface vide / conducteur ohmique dans l'ARQS – Aspects énergétiques

L'approximation utilisée pour établir la relation de dispersion simplifiée (2.2) consiste à écrire :

$\dfrac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0\sigma\omega \Leftrightarrow k_0 = \dfrac{\omega}{c} \ll \dfrac{1}{\delta}$ (en utilisant l'expression de δ trouvée en 2.3).

Comme $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$, on en déduit que la quantité $\varepsilon = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda_0} \ll 1$ dans le domaine $f < 10^{14}$ Hz.

4.1. Montrer que l'indice complexe du métal peut s'écrire : $\underline{n} = \dfrac{1-j}{\varepsilon}$. Rappel : $\underline{n} = \dfrac{\underline{k}}{k_0}$.

4.2. Exprimer $\underline{r}_{1\to 2}$ et $\underline{t}_{1\to 2}$ à l'interface vide/métal puis les exprimer en fonction de ε.

Rappel : $\underline{r}_{1\to 2} = \dfrac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$ et $\underline{t}_{1\to 2} = \dfrac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$.

Donner les valeurs de ces coefficients dans la limite du conducteur parfait ($\sigma \to \infty$) et interpréter. Citer des applications dans la vie courante.

$2^{ème}$ partie – Fréquences optiques - Modélisation du métal hors ARQS

Hypothèses et approximations

1. Electrons non relativistes : $v \ll c$.
2. Poids des électrons négligé devant la partie électrique de la force de Lorentz : $P \ll qE$.
3. Force magnétique négligée devant la force électrique dans Lorentz : $\dfrac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$.
4. Ions du réseau immobiles.
5. Modèle de Drude : force de frottement sur un électron $-\dfrac{m_e}{\tau}\vec{v}$.
6. Champ $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ de période $T < \tau \approx 10^{-14}$ s ($f \approx 10^{15}$ Hz).

5. Conductivité complexe

5.1. En utilisant la $2^{ème}$ loi de Newton en notation complexe pour déterminer la réponse du milieu en régime sinusoïdal établi, montrer que le métal soumis à un champ $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$ possède une conductivité ***complexe*** : $\underline{\sigma} = \dfrac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}$ avec $\sigma_0 = \dfrac{n_e e^2 \tau}{m_e}$.

5.2. On rappelle que le métal est localement neutre.
A partir des équations de Maxwell, montrer que $\underline{\vec{E}}$ vérifie l'équation :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = 0$$

5.3. Montrer que la relation de dispersion est de la forme $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\underline{\sigma}$.

5.4. En utilisant l'expression de la conductivité complexe, comment la relation de dispersion se simplifie-t-elle pour $\omega\tau \gg 1$?

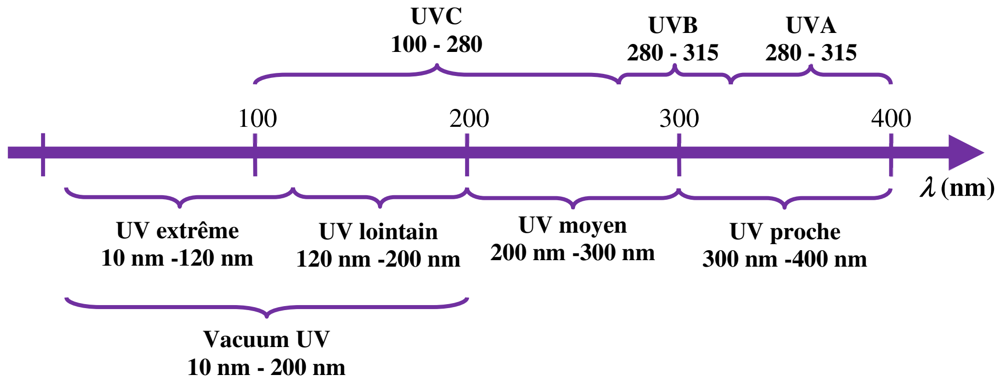
Montrer que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$ et que tout se passe comme si le métal se comportait comme un ***plasma*** avec une pulsation à identifier.

5.5. Évaluer numériquement ω_P.

6. Interface vide / métal dans le visible

Dans le domaine visible, dans quel domaine de comportement du plasma équivalent au métal se situe-t-on (prendre $f \approx 10^{15}$ Hz) ? Que vaut alors $R_{1\to2}$?

7. Transparence des métaux dans l'ultraviolet



Dans le domaine des ultraviolets extrêmes (λ < 100 nm), dans quel domaine de comportement du plasma équivalent au métal se situe-t-on ? Que vaut alors $T_{1\to2}$? Commenter.

Est-il possible de bronzer derrière une feuille de papier aluminium comme semble le suggérer le titre de ce paragraphe ?