

Evaluation des incertitudes – Comparaison de mesures

Sommaire

- I - Mesure d'une grandeur
 - 1. Définition
 - 2. Variabilité de la mesure
 - 3. Incertitude-type
- II - Evaluation des incertitudes lors d'une mesure directe
 - 1. Plusieurs mesures : évaluation de type A de l'incertitude-type
 - 2. Mesure unique : évaluation de type B de l'incertitude-type
- III - Composition des incertitudes (mesure indirecte)
 - 1. Evaluation par le calcul
 - 2. Evaluation par simulation numérique – Méthode de Monte-Carlo
- IV - Ecriture du résultat – Comparaison de mesures

I – Mesure d'une grandeur

1. Définition

On appelle **mesure** une **procédure expérimentale** qui conduit à attribuer un **ensemble** de valeurs numériques à une grandeur, accompagné d'une unité appropriée.

🔦 Analyse de la définition :

- Une mesure est étroitement liée à un **protocole** (il est nécessaire de documenter précisément la démarche utilisée).
- « Le » « résultat » d'une mesure est un **ensemble de valeurs** (et non une **valeur unique**), cf. §2 et §3 ci-dessous.

2. Variabilité de la mesure

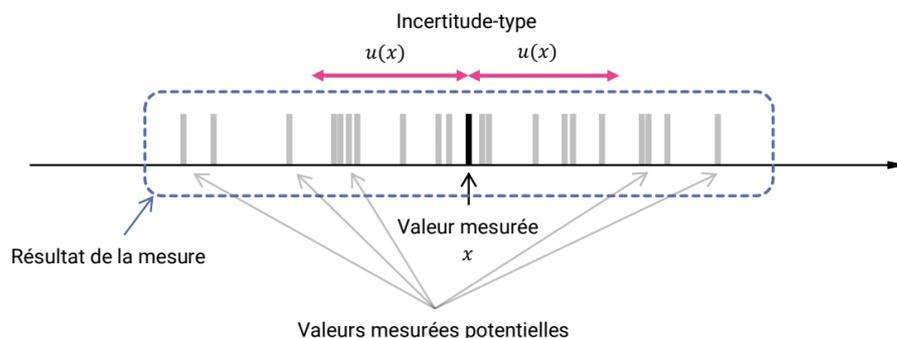
🔦 La mesure est **intrinsèquement variable** bien qu'on ne s'en aperçoive pas toujours.

- Si on **répète** une mesure, on trouve souvent une valeur numérique différente. Par souci de clarté, on peut appeler chacune de ces valeurs numériques « **observation** » ou « indication ».
- Si on utilise **plusieurs appareils** « identiques » (de la même marque et du même modèle, correctement réglés et étalonnés) pour mesurer la même grandeur, on observe autant de valeurs qu'il y a d'appareils.

L'objectif est de **quantifier cette variabilité**.

3. Incertitude-type

🔦 On illustre cette variabilité par le schéma ci-dessous : la valeur mesurée x fait partie d'un ensemble $\{x_i\}$ de valeurs plausibles (appelé **résultat de la mesure**) et la **variabilité de l'observation x est caractérisée par l'incertitude-type $u(x)$** .



La dispersion est inhérente au processus de mesure. L'incertitude-type permet de la quantifier.

Incertitude relative (incertitude-type relative) : $\frac{u(x)}{x}$

1. **Plusieurs mesures : évaluation de type A (approche statistique) de l'incertitude-type**

L'évaluation de type A consiste à quantifier la dispersion des valeurs mesurées en répétant N fois le **même protocole**, on obtient ainsi un ensemble $\{x_i\}$ de N valeurs.

L'incertitude-type $u(x)$ est alors évaluée à partir de l'écart-type σ_x .

✓  La meilleure estimation de la grandeur x est la valeur moyenne \bar{x} de la série de mesures : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$

✓  L'incertitude-type est : $u(x) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ avec $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$ (écart-type de la série de mesures)

L'incertitude-type diminue avec le nombre de mesurages.

2. **Mesure unique : évaluation de type B de l'incertitude-type**

On se place ici dans le cas où on n'a pu réaliser qu'une **observation unique**, ou bien dans le cas où la répétition des observations conduit exactement à la même valeur (l'instrument utilisé cache la variabilité de la mesure).

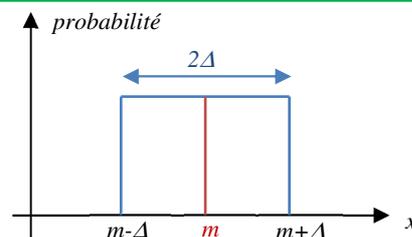
➤ **Distribution uniforme** (exemple : lecture d'une graduation)

L'ensemble des valeurs mesurées peut-être modélisé par une variable aléatoire ayant une densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $[m-\Delta, m+\Delta]$.

L'incertitude-type est : $u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$

 Les critères utilisés pour estimer la demi-largeur Δ sont subjectifs et doivent toujours être explicités.

 La demi-largeur Δ pour une mesure sur banc optique n'est pas définie par la lecture de la graduation mais par la latitude de mise au point beaucoup plus importante que « l'erreur de lecture ».



 **Mesure avec un multimètre**

L'incertitude-type associée à la mesure à l'aide d'un multimètre est donnée par une formule fournie par la notice de l'instrument. On y trouve le plus souvent une « précision », qui n'est pas l'incertitude-type. On considère que cette « précision » est en réalité la demi-étendue Δ de l'intervalle $[m - \Delta ; m + \Delta]$ qui représente le résultat de la mesure.

La « précision » dépend du calibre choisi.

On multiplie la valeur affichée (en valeur absolue) par une constante donnée (souvent exprimée en pourcentage) et on lui rajoute un multiple de la résolution de l'appareil dans le calibre choisi ; cette résolution est la plus petite valeur affichable dans le calibre donné.

Exemple : RLCmètre Agilent U1733C utilisé en TP (mesure de résistance, extrait).

Range	Resolution	U1731C/U1732C/U1733C			U1732C/U1733C		U1733C
		100 Hz	120 Hz	1 kHz	10 kHz	100 kHz	DCR ¹
2 Ω ¹	0.0001 Ω	0.7% + 50	0.7% + 50	0.7% + 50	0.7% + 50	1.0% + 50	0.7% + 50
20 Ω ¹	0.001 Ω	0.7% + 8	0.7% + 8	0.7% + 8	0.7% + 8	0.7% + 8	0.7% + 8
200 Ω ¹	0.01 Ω	0.2% + 3	0.2% + 3	0.2% + 3	0.2% + 3	0.5% + 5	0.2% + 3
2000 Ω	0.1 Ω	0.2% + 3	0.2% + 3	0.2% + 3	0.2% + 3	0.5% + 5	0.2% + 3
20 kΩ	0.001 kΩ	0.2% + 3	0.2% + 3	0.2% + 3	0.2% + 3	0.5% + 5	0.2% + 3

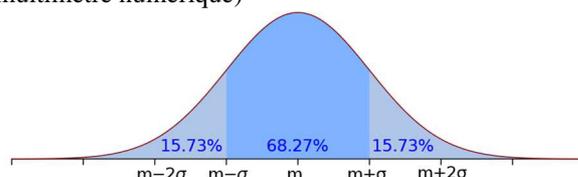
Pour une lecture de 1531 Ω à 1 kHz, on aura donc $\Delta = 1531 \times 0,2/100 + 3 = 6 \Omega$.

➤ **Distribution Gaussienne ou normale** (exemple : utilisation d'un multimètre numérique)

L'incertitude-type $u(x)$ est égale à l'écart-type σ : $u(x) = \sigma$ (à condition de connaître σ , ce qui est très rarement le cas).

Niveaux de confiance :

- 68 % des données de trouvent dans $[m-\sigma, m+\sigma]$
- 95 % des données de trouvent dans $[m-2\sigma, m+2\sigma]$
- 99,7% des données de trouvent dans $[m-3\sigma, m+3\sigma]$



Jhguch at en.wikipedia, CC BY-SA 2.5, via Wikimedia Commons

➤ **Quelques mesures répétées** (nombre insuffisant pour une approche de type A) : $u(x) = \sigma(x)$ (écart-type).

III – Composition des incertitudes (mesure indirecte)

On cherche souvent l'incertitude-type d'une grandeur calculée à partir d'une ou plusieurs grandeurs mesurées.

Exemple : soit une grandeur z dépendant de deux grandeurs x et y : $z = f(x, y)$.

On note $u(x)$ et $u(y)$ les incertitudes-types des grandeurs x et y .

On cherche l'incertitude-type $u(z)$ de la grandeur z ; $u(z)$ est appelée incertitude composée.

1. Évaluation par le calcul

Les relations qui suivent sont valables sous certaines **hypothèses**.

Lorsqu'on combine plusieurs grandeurs, il faut qu'elles restent indépendantes, autrement dit que la connaissance de l'une n'influe pas sur l'autre ; lorsque les relations sont non-linéaires, il faut que les incertitudes relatives restent modestes, de l'ordre du pourcent.

$z = \lambda x$	$u(z) = \lambda u(x)$
$z = x + y$ ou $z = x - y$	$u(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}$
$z = x \times y$ ou $z = \frac{x}{y}$	$u(z) = z \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$
$z = x^\alpha \times y^\beta$	$u(z) = z \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$

Toujours évaluer les contributions des différentes incertitudes relatives (comparer $\frac{u(x)}{x}$ et $\frac{u(y)}{y}$ dans le tableau précédent) avant d'évaluer $u(z)$ (de façon à simplifier au maximum son expression).

2. Évaluation par simulation numérique – Méthode de Monte-Carlo

Dans le cas où la composition des incertitudes est trop compliquée ou lorsque les hypothèses ne sont pas vérifiées, on utilise une **simulation de Monte-Carlo** pour déterminer $u(z)$.

Principe de la méthode de Monte-Carlo - Évaluation de $u(z)$ pour $z = f(x, y)$ connaissant Δx et Δy

- Mesurer x et y et en déduire $z = f(x, y)$.
- Évaluer les demi-largeurs Δ_x et Δ_y des intervalles dans lesquels x et y doivent raisonnablement se trouver.
- Réaliser N tirages aléatoires de x dans $[x-\Delta_x, x+\Delta_x]$ et N tirages de y dans $[y-\Delta_y, y+\Delta_y]$ et en déduire N valeurs de z .
Rq : on peut aussi tirer N valeurs aléatoires dans $[-\Delta_x, \Delta_x]$ et les ajouter à x (code ci-dessous), de même pour y .
- L'incertitude-type sur l'unique valeur mesurée z est : $u(z) = \sigma$ (écart-type des N valeurs simulées de z).

Exemple de code python pour $z = x*y$: on cherche $u(z)$ à partir d'une mesure unique de x et y (et de l'évaluation de Δ_x et Δ_y)

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 N = 100000 # Nombre de tirages aléatoires
5 xm, ym = 12.5, 75 # Valeurs mesurées pour x et y
6 Dx, Dy = 0.5, 2 # Évaluation de Dx et Dy (demi-largeurs déduites du protocole)
7
8 x = xm + rd.uniform(-Dx, Dx, N) # x = array numpy de N valeurs aléatoires
9 y = ym + rd.uniform(-Dy, Dy, N) # y = array numpy de N valeurs aléatoires
10 z = x*y # z = array numpy de N valeurs calculées
11
12 print('Valeur moyenne :', np.average(z)) # Calcul moyenne (ou np.mean)
13 print('u(z) :', np.std(z, ddof=1)) # Calcul écart-type (ddof=1 -> N-1)
```



Pour tracer l'**histogramme** des valeurs, il suffit d'ajouter les lignes suivantes :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 plt.hist(z, bins='rice') # Tracé de l'histogramme (bins='rice' -> nombre classes)
4 plt.show()
```

1. Présentation des résultats

 Un résultat de mesure doit inclure :

- ✓ la **valeur mesurée**, sous la forme $x = \dots$ en précisant l'**unité** appropriée ;
- ✓ l'**incertitude-type** associée à la valeur mesurée, sous la forme $u(x) = \dots$ en utilisant la **même puissance de 10** que celle de la valeur mesurée, et évidemment la **même unité** avec **deux chiffres significatifs en général** ;
- ✓ idéalement des informations concernant l'obtention des deux précédentes grandeurs, comme par exemple la méthode utilisée pour l'évaluation de l'incertitude, le nombre d'observations réalisées, etc.

Il est possible de condenser la valeur mesurée et l'incertitude-type sous la forme :

$x \pm u(x)$ mais il faut alors bien préciser que ce qui suit le \pm est **l'incertitude-type**.

Dans ce cas **la puissance de 10 doit être commune et en facteur**.

2. Comparaison de deux mesures

On appelle **valeur de référence** une valeur mesurée par une méthode de référence, c'est-à-dire par une méthode scientifiquement jugée comme étant supérieure à toute autre.

Par extension on appelle valeur de référence toute valeur mesurée dont l'incertitude-type est supposée négligeable devant celle obtenue par une autre méthode.

-  Pour comparer **deux mesures x_1 et x_2** (obtenues par deux protocoles différents) d'incertitudes-types respectives $u(x_1)$ et $u(x_2)$, on calcule le **z-score** ou **écart normalisé** défini par :

$$z = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

-  Pour comparer une **mesure x et une valeur de référence x_{ref}** (d'incertitude-type négligeable devant celle de x par définition), l'expression du z-score se simplifie en :

$$z = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}$$

 **Compatibilité de deux mesures :**

- ✓ $z < 2$: **mesures compatibles**
- ✗ $z \geq 2$: **mesures incompatibles**

Si on ne comprend pas d'où vient un désaccord entre deux mesures, ou si on n'est pas certain de son origine, il est toujours judicieux de **refaire une expérience**.

Dans tous les cas il faut bien comprendre que **la présence d'une incompatibilité n'est pas synonyme d'échec**.

La méthode de mesure peut tout à fait légitimement donner des résultats incompatibles avec une valeur de référence.

Il est également possible qu'une loi physique ne soit valable que dans un domaine de paramètres plus restreint que celui qu'on explore, qu'un protocole n'est pas applicable...il faut alors faire preuve d'esprit critique.