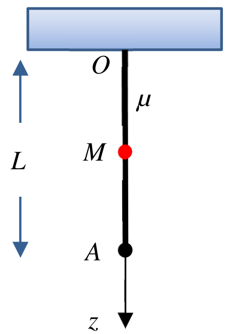
Vibrations d'une corde pesante verticale (d'après concours)

Préliminaires



Une corde de masse linéique μ et de longueur L est attachée en O à un support horizontal. La corde est au repos et pend donc verticalement. L'axe Oz désigne un axe vertical orienté vers le bas.

On considère un point M de la corde situé entre O et l'extrémité A de la corde.

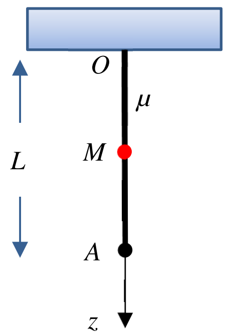
1. Définir la tension en un point M de la corde.
2. L'extrémité A de la corde est libre, établir l'expression $T(z)$ de la tension de la corde en M en fonction de μ, g, L et z.
3. Les deux extrémités sont fixes (corde sous tension)
   Comment l'expression de la tension $T(z)$ de la corde est-elle modifiée si on applique une tension T_A à l'extrémité basse de la corde ?

Vibration de la corde

1. La corde est attachée à ses deux extrémités et fortement tendue : $T_A \gg mg$ où m est la masse totale de la corde (cf. question 3. ci-dessus).
   La corde vibre et le point M, de cote z à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté x est fonction de z et du temps t. On note $\theta(z,t)$ l'angle que fait localement la corde avec l'axe vertical.
   Etablir l'équation de propagation de la fonction $x(z,t)$ dans l'approximation des petits mouvements. Exprimer la célérité c des ondes en fonction de T_A et de μ.
2. L'extrémité A de la corde est libre (cf. question 2. des préliminaires).
   Montrer que l'équation des ondes devient $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\dfrac{\partial x}{\partial z}$.

Vibrations d'une corde pesante verticale (d'après concours)

Préliminaires



Une corde de masse linéique μ et de longueur L est attachée en O à un support horizontal. La corde est au repos et pend donc verticalement. L'axe Oz désigne un axe vertical orienté vers le bas.

On considère un point M de la corde situé entre O et l'extrémité A de la corde.

1. Définir la tension en un point M de la corde.
2. L'extrémité A de la corde est libre, établir l'expression $T(z)$ de la tension de la corde en M en fonction de μ, g, L et z.
3. Les deux extrémités sont fixes (corde sous tension)
   Comment l'expression de la tension $T(z)$ de la corde est-elle modifiée si on applique une tension T_A à l'extrémité basse de la corde ?

Vibration de la corde

1. La corde est attachée à ses deux extrémités et fortement tendue : $T_A \gg mg$ où m est la masse totale de la corde (cf. question 3. ci-dessus).
   La corde vibre et le point M, de cote z à l'équilibre, se déplace transversalement. Ce déplacement, noté x est fonction de z et du temps t. On note $\theta(z,t)$ l'angle que fait localement la corde avec l'axe vertical.
   Etablir l'équation de propagation de la fonction $x(z,t)$ dans l'approximation des petits mouvements. Exprimer la célérité c des ondes en fonction de T_A et de μ.
2. L'extrémité A de la corde est libre (cf. question 2. des préliminaires).
   Montrer que l'équation des ondes devient $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g(L-z)\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2} - g\dfrac{\partial x}{\partial z}$.