Corde vibrante amortie

Énoncé type QC – Oral – 5/2

Établir l'équation de dispersion sur une corde horizontale inextensible de masse linéique μ amortie par frottement fluide ($d\vec{F} = -h\mu dx\vec{v}$) dans l'approximation des petits mouvements au voisinage de l'équilibre. On néglige le poids de la corde devant la tension.

Énoncé détaillé

La corde s'étend de $x = 0$ à $x = \infty$ et est tendue avec la tension T.

1 Établir l'équation des ondes sur la corde.

On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{y}(x,t) = \underline{y_m} e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ où $\underline{y_m} = y_m e^{j\varphi}$, $\underline{k}$ est a priori complexe et ω est réel.

2 Établir l'équation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\dfrac{h}{c^2}$.

3 Expliciter $y(x, t)$ en posant $\underline{k} = k' + jk''$ (sans chercher à déterminer k' et k'').

4 En limitant les calculs à l'ordre un en $\varepsilon = h/\omega$, montrer que la relation de dispersion devient $\underline{k} = \pm\dfrac{\omega}{c}\left(1 - j\dfrac{h}{2\omega}\right)$. En déduire k' et k'' puis la vitesse de phase v_ϕ et la distance caractéristique d'amortissement δ en fonction de h et c.

Corde vibrante amortie

Énoncé type QC – Oral – 5/2

Établir l'équation de dispersion sur une corde horizontale inextensible de masse linéique μ amortie par frottement fluide ($d\vec{F} = -h\mu dx\vec{v}$) dans l'approximation des petits mouvements au voisinage de l'équilibre. On néglige le poids de la corde devant la tension.

Énoncé détaillé

La corde s'étend de $x = 0$ à $x = \infty$ et est tendue avec la tension T.

1 Établir l'équation des ondes sur la corde.

On cherche des solutions complexes de la forme $\underline{y}(x,t) = \underline{y_m} e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ où $\underline{y_m} = y_m e^{j\varphi}$, $\underline{k}$ est a priori complexe et ω est réel.

2 Établir l'équation de dispersion $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\omega\dfrac{h}{c^2}$.

3 Expliciter $y(x, t)$ en posant $\underline{k} = k' + jk''$ (sans chercher à déterminer k' et k'').

4 En limitant les calculs à l'ordre un en $\varepsilon = h/\omega$, montrer que la relation de dispersion devient $\underline{k} = \pm\dfrac{\omega}{c}\left(1 - j\dfrac{h}{2\omega}\right)$. En déduire k' et k'' puis la vitesse de phase v_ϕ et la distance caractéristique d'amortissement δ en fonction de h et c.