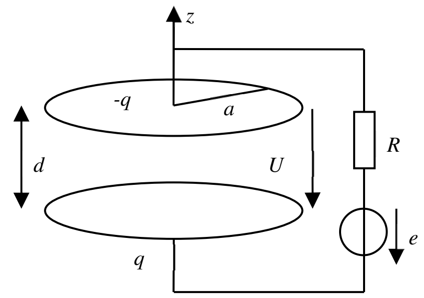
Condensateur plan

Les armatures d'un condensateur plan, constituées de deux disques conducteurs de rayon a (surface $S = \pi a^2$), de même axe Oz et séparées d'une distance d sont reliées à un générateur de f.e.m. e par une résistance R.

Dans tout le problème, on néglige les effets de bord (i.e. on considère que les champs sont les mêmes que ceux créés par un condensateur d'armatures infinies).

On note U la tension aux bornes du condensateur.



1ère partie – Régime permanent

1. *Régime permanent - Condensateur chargé*

a. *Capacité d'un condensateur plan « infini »*

i. Etablir l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ.

ii. En déduire le champ créé par un condensateur plan d'armatures infinies chargées respectivement σ et $-\sigma$.

iii. En déduire l'expression du potentiel électrostatique V(M) en fonction de σ, ε_0 et z à l'intérieur du condensateur à une constante additive près.
Donner alors la relation entre U, σ, d et ε_0 puis la relation entre $\left\|\vec{E}\right\|$, $|U|$ et d.

On suppose dans la suite que ces résultats restent valables pour un condensateur d'armatures finies (cf. schéma ci-dessus).

iv. Exprimer la charge surfacique σ en fonction de q et S (on assimile les armatures à des disques sans épaisseur, il n'y a donc pas à considérer une armature comme un disque de faible épaisseur possédant deux faces).

v. Déduire des questions précédentes la capacité C du condensateur en fonction de S, d et ε_0.

b. *Ordres de grandeur*

i. $S = 10$ cm^2 et $d = 1$mm. Calculer C.

Si le milieu entre les armatures est de l'air de permittivité proche de celle du vide, le champ électrique ne peut excéder une valeur de l'ordre de $3\ 10^6$ Vm^{-1} au-delà de laquelle l'ionisation de l'air crée une étincelle de rupture entre les armatures du condensateur.

ii. Commenter les ordres de grandeur de la charge et de la différence de potentiel correspondantes.

c. *Énergie*

i. Rappeler la définition de la densité d'énergie électromagnétique u_{em} et en déduire l'énergie emmagasinée U_{em} dans le volume du condensateur chargé en fonction de la capacité C et de la différence de potentiel U. Aucun champ magnétique n'est présent.

2ème partie – Régime variable

On note à présent $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur et $i(t)$ l'intensité dans le circuit.

2. *Régime variable – Charge du condensateur*

a. *Théorie électrocinétique*

i. En utilisant les lois de l'électrocinétique, établir l'équation différentielle du circuit au cours de la charge puis déterminer $u_C(t)$ sachant qu'à $t = 0$ le condensateur est déchargé.

ii. Rappeler l'expression de la puissance électrocinétique instantanée $p(t)$.
Etablir l'expression de l'énergie électrique U_e emmagasinée dans un condensateur en fonction de sa capacité C et de la tension à ses bornes $u_C(t)$.

iii. Effectuer un bilan de puissance sur le circuit.
Exprimer la variation ΔU_e de l'énergie emmagasinée dans le condensateur au cours de la charge en fonction de C et e (cette variation est égale à l'énergie U_{em} dans l'état final).
Exprimer le travail électrique $W_{\text{géné}}$ fourni par le générateur en fonction de C et e.
Exprimer le travail électrique W_J fourni à la résistance et dissipé par effet Joule au cours de la charge en fonction de C et e et commenter.

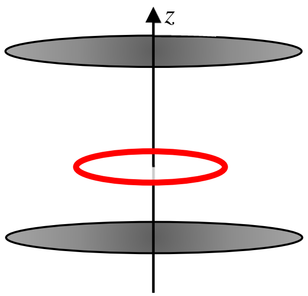
b. *Théorie électromagnétique*

On admet en première approximation qu'à l'intérieur du condensateur le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_z(t)\vec{e}_z$, que le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_\theta(r,t)\vec{e}_\theta$ et que le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

i. Justifier qualitativement l'existence d'un champ magnétique.

ii. Déterminer l'intensité $E(t)$ du champ électrique en utilisant le théorème de Gauss appliqué à une surface (Σ) cylindrique d'axe Oz, de rayon a et englobant l'armature de charge $q(t)$.

iii. En appliquant le théorème d'Ampère généralisé à un contour (C) circulaire plan centré sur l'axe Oz, de rayon $r < a$ établir que $\vec{B}(r,t) = \dfrac{\mu_0 \dot{q}(t) r}{2\pi a^2}\vec{e}_\theta$.
Compléter le schéma ci-contre en indiquant toutes les grandeurs impliquées dans le calcul.
Rappel : à l'intérieur du condensateur, la densité de courant $\vec{j}$ est nulle).



iv. Exprimer le vecteur de Poynting en fonction de ε_0, a, q et $\dot{q}$.
En déduire la puissance électromagnétique $\mathcal{P}$ reçue par l'intérieur du condensateur puis l'énergie électromagnétique U_{em} emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge.
Comparer au résultat de la question 1.c.

v. Exprimer la densité d'énergie électromagnétique u_{em} en fonction de ε_0, a et q puis donner sa valeur dans l'état final.
En déduire l'énergie électromagnétique U_{em} emmagasinée par le condensateur au cours de sa charge.