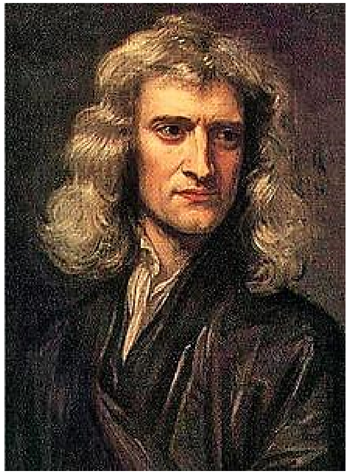
Vitesse du son dans un gaz : modèle isotherme vs modèle isentropique

Énoncé type QC – Oral – 5/2

Un siècle après Isaac Newton, Pierre Simon de Laplace propose une modélisation fournissant une valeur correcte de la vitesse du son dans l'air (la modélisation proposée par Newton fournissait une valeur un peu faible).
Laquelle des deux hypothèses (évolution de l'air isotherme ou isentropique) permet de modéliser correctement la propagation du son dans l'air ?

1749 - 1827
http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_de_Laplace



1643 - 1727
http://fr.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

Énoncé détaillé

On considère une onde acoustique se propageant dans un gaz de masse molaire M.

1. Le coefficient de compressibilité isotherme χ_T est défini par : $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ (1).
   1.1. Préciser ses unités et commenter son signe.
   1.2. Exprimer χ_T en fonction de la masse volumique μ en utilisant la définition (1).
   1.3. Calculer χ_T(GP) pour un gaz parfait et donner son ordre de grandeur pour l'air ambiant.
   1.4. Commenter : rechercher les ordres de grandeur de χ_T(liquide) et χ_T(solide).

2. Le coefficient de compressibilité isentropique χ_S est défini par : $\chi_S = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S$ (2).

   Calculer χ_S(GP) pour un gaz parfait (exprimer l'une des lois de Laplace en fonction de μ puis calculer la différentielle logarithmique de cette équation) et le comparer à χ_T(GP).

3. Équations thermodynamiques linéarisées
   3.1. Ces coefficients sont, a priori, des fonctions de P (et T pour un gaz réel). Expliquer pour quelle raison ils peuvent être considérés comme constants dans l'air ambiant.
   3.2. Pour linéariser les expressions de χ_T et χ_S, on exprime μ, $d\mu$ et dP dans l'approximation acoustique : on obtient alors une relation entre μ_1, μ_0, P_1 et le coefficient χ considéré.

4. Équation de propagation et célérité du son
   4.1. En ajoutant l'expression linéarisée de χ_T aux équations issues des équations d'Euler et de conservation de la masse, établir l'équation de propagation vérifiée par la pression acoustique P_1.
   4.2. En déduire l'expression de la célérité c_T des ondes dans le modèle isotherme en fonction de μ_0 et χ_T puis en fonction de R, T_0 et M.
   4.3. Déduire de même l'expression de la célérité c_S des ondes dans le modèle isentropique en fonction de μ_0 et χ_S puis en fonction de γ, R, T_0 et M.
   4.4. Calculer numériquement c_T pour l'air à la température $T_0 = 300K$.
   4.5. Calculer numériquement c_S et conclure.

5. Newton calcula la vitesse du son en utilisant l'hypothèse des transformations isothermes, ce qui conduisit à une valeur trop faible par rapport à la valeur expérimentale. Laplace résolut ce problème en supposant les transformations adiabatiques, ce qui revient à négliger la diffusion thermique.
   On se propose ici de justifier cette hypothèse. En supposant que l'onde sonore est harmonique de fréquence f, de quelle distance les maxima et les minima de température sont-ils séparés ? Comparer à la distance caractéristique de diffusion thermique pendant le même temps et conclure.