Calcul différentiel

Variation d'une fonction

Soit f une fonction de la variable x.

Si la variable x varie d'une quantité notée Δx (de x à $x + \Delta x$ où $\Delta x > 0$ ou < 0), la valeur de la fonction passe de $f(x)$ à $f(x + \Delta x)$.

Par définition, la ***variation*** de la fonction f, notée Δf, est : $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

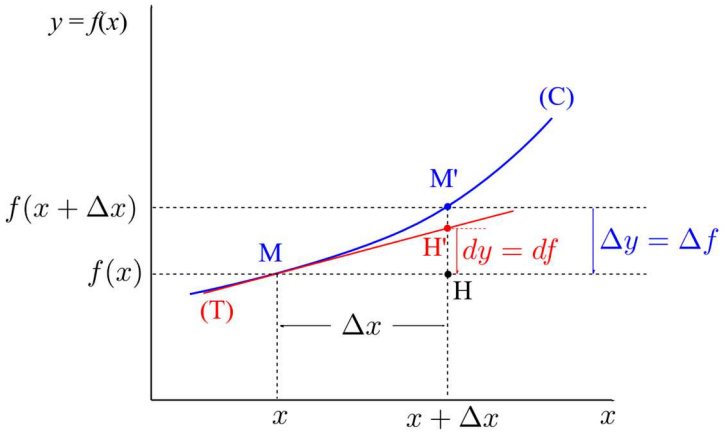
En général, il n'existe pas de relation mathématique *simple* entre Δf et Δx, on va donc chercher une *relation approchée*.

Différentielle d'une fonction

La différentielle de f au point x, notée df, est la *fonction* qui associe à la *variable* Δx la valeur $f'(x)\Delta x$: on devrait noter $df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ où Δx est la variable et x_0 un paramètre.

Cette définition se comprend à l'aide de l'interprétation géométrique ci-dessous.

Interprétation géométrique



(C) est le graphe de la fonction $f(x)$ et (T) la tangente à la courbe au point M d'abscisse x.

Δx est l'accroissement de la variable x de M à M'

$\Delta y = \Delta f$ est l'accroissement de la fonction = écart entre $f(x)$ et $f(x + \Delta x)$ = **HM'**

$dy = df$ est l'écart entre $f(x)$ et la droite tangente en M = **HH'**

Or $p = f'(x)$ étant la pente de la tangente en M, on a HH' = $p\,\Delta x$ c'est-à-dire $df = f'(x)\,\Delta x$.

Notations en physique

- ✓ Pour des variations infinitésimales : $df = f'(x)\,dx$
- ✓ Pour des variations petites mais finies : $\Delta f \simeq f'(x)\,\Delta x$

Propriétés des différentielles

Les propriétés des différentielles découlent de celles des dérivées.

Soient deux fonctions f et g et n un réel.

$d(f + g) = df + dg$ $\qquad$ $d(f - v) = df - dg$

$d(f\,g) = g\,df + f\,dg$ $\qquad$ $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

$d(f^n) = n\,f^{n-1}\,df$ $\qquad$ $d\left(\ln f\right) = \dfrac{df}{f}$ $\qquad$ $d(\cos f) = -\sin(f)\,df$ ...

Variation d'une fonction de plusieurs variables

Différentielle et gradient