Bilans en physique

Bilans de masse, de matière, de charge, d'énergie, d'entropie, d'énergie mécanique, de quantité de mouvement, de moment cinétique.

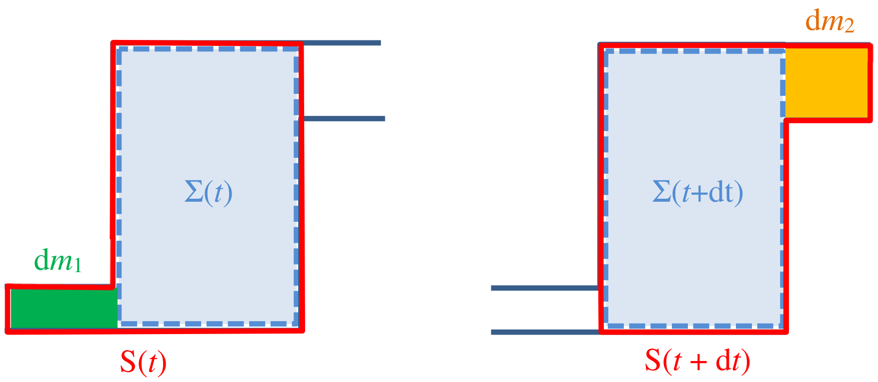
Système fermé déformable (point de vue Lagrangien) en régime stationnaire

Exemple : 1er principe pour les écoulements (1er principe pour les systèmes ouverts ou encore 1er principe industriel) valable en régime stationnaire.

Le système ***fermé*** S est le contenu de la paroi ***déformable mobile*** (en rouge sur le schéma ci-dessous) : les frontières du système se déforment pour ***suivre le fluide*** dans son déplacement entre les instants t et $t + dt$ (frontières « étanches »).

On note **Σ** ***le volume commun*** (délimité par les pointillés bleus ci-dessous) entre les deux instants (il n'est pas constitué des mêmes particules à t et à $t + dt$).

Ainsi, le système S est constitué :
- à l'instant t, de la masse dm_1 et de la zone commune $\Sigma(t)$: $S(t) = \{ dm_1 , \Sigma(t) \}$
- à l'instant $t + dt$, de la masse dm_2 et de $\Sigma(t + dt)$: $S(t + dt) = \{ dm_2 , \Sigma(t + dt) \}$



Bilan de masse :

Masse du système S à l'instant t : $m_{S(t)} = dm_1 + m_{\Sigma(t)}$ (grandeur extensive)
Masse du système S à l'instant $t + dt$: $m_{S(t+dt)} = dm_2 + m_{\Sigma(t+dt)}$

En régime ***stationnaire*** (indépendant du temps) : $m_{\Sigma(t)} = m_{\Sigma(t+dt)}$

La variation de masse du système S entre t et $t + dt$ est donc $dm_S = dm_2 - dm_1$
Généralisable à plusieurs entrées/sorties : $dm_S = \Sigma\, dm_i$ (algébrique, convention thermo).

Ou encore $\dfrac{dm_S}{dt} = \sum_i D_{m_i}$ (somme des débits massiques algébriques).

Comme le système S est ***fermé***, $m_{S(t)} = m_{S(t+dt)}$ (conservation de la masse d'un système fermé en l'absence de réactions nucléaires) $\Rightarrow dm_S = 0$.

On en déduit que $dm_1 = dm_2$ noté dm dans la suite.
Avec $\mathbf{dm = D_m\, dt}$ où D_m est le débit massique.

Ce bilan peut être adapté à toute grandeur extensive (i.e. en remplaçant la masse m par l'énergie interne, l'entropie, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur…).
Pour exploiter le bilan, il est ensuite intéressant de faire intervenir des grandeurs massiques.

On exprime ainsi, pour le système S, les ***variations*** entre t et $t + dt$ de :
- l'énergie interne $dU_S = dm\,(u_2 - u_1)$;
- l'énergie cinétique $dE_{C\,S} = dm\,(c_2^2 - c_1^2)$ (c = vitesse fluide dans le référentiel) ;
- l'énergie potentielle de pesanteur $dE_{Pp\,S} = dm\,(z_2 - z_1)$ (Oz vers le haut) ;
- l'entropie $dS_S = dm\,(s_2 - s_1)$;
- de quantité de mouvement $d\vec{p}_S = dm\left(\vec{p}_2 - \vec{p}_1\right)$;
- de moment cinétique…

Il reste à compléter les bilans en tenant compte ***des échanges énergétiques*** entre le système S et l'extérieur pendant le temps dt (ou, pour les deux derniers bilans, des forces ou des moments) :
- travaux des forces de pression amont et aval (fluide compressible → 1er principe indus)
  $\delta W_{\text{amont/aval}} = dm\,(P_1 v_1 - P_2 v_2)$ (v volume massique) ;
- travaux des forces de pression amont et aval (fluide incompressible → Bernoulli)
  $\delta W_{\text{amont/aval}} = dm\,(P_1 - P_2)/\mu$ (μ masse volumique) ;
- autres travaux (travaux « utiles » : pompes, compresseurs, turbines, ailettes…)
  $\delta W_u = dm\, w_u = D_m\, dt\, P_u$;
- échanges thermiques $\delta Q = dm\, q = D_m\, dt\, P_{Th}$;
- forces ou moments.

Applications en régime stationnaire – Bilans macroscopiques

Bilan d'énergie (1er principe) ⇒ 1er principe pour les écoulements

En énergie massique : $\left(h_2 + \frac{1}{2}c_2^2 + gz_2^2\right) - \left(h_1 + \frac{1}{2}c_1^2 + gz_1^2\right) = w_u + q$

En puissance : $D_m\left((h_2 + \frac{1}{2}c_2^2 + gz_2^2) - (h_1 + \frac{1}{2}c_1^2 + gz_1^2)\right) = P_u + P_{Th}$

Généralisation : $\sum_i D_{m_i}(h_i + \frac{1}{2}c_i^2 + gz_i) = P_u + P_{Th}$ avec $\sum_i D_{m_i} = 0$ (loi des nœuds)

Bilan d'énergie mécanique seule (fluide PSIH) ⇒ théorème de Bernoulli

$$\frac{1}{2}c^2 + gz + \frac{P}{\mu} = \text{cte}_{ligne}$$

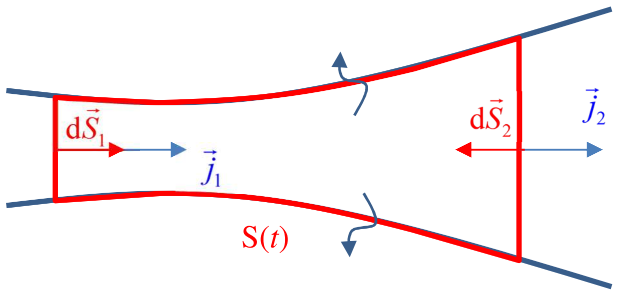
Applications en régime non stationnaire

Propulsion par réaction (fusée, avion, poulpe…)

Système ouvert fixe (point de vue Eulérien)

Exemple : bilan local de particules, de masse, d'énergie, de charge

Le système ***ouvert*** S est le contenu de la paroi ***rigide fixe*** (en rouge sur le schéma ci-dessous) : les frontières du système sont traversées par des ***flux*** de particules ou/et d'énergie entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ (frontières « poreuses »).



Soit une grandeur G extensive (masse, charge, énergie, nombre de particules, entropie…).

Effectuer un bilan de la grandeur G consiste à écrire que ***la variation de G au cours du temps*** entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ (notée dG) ***est égale à la somme des causes de variation de G dans l'espace*** : flux à à travers les frontières ($\mathrm{d}G_{\text{ech}} = \mathrm{d}G_{\text{entrant/sortant}}$) et création/disparition au sein du système ($\mathrm{d}G_C = \mathrm{d}G_{\text{source/puits}}$).

$$dG = G(t+dt) - G(t) = \underbrace{\delta G_{\text{entrant}} + \delta G_{\text{sortant}}}_{\text{Flux à travers les frontières}} + \underbrace{\delta G_C}_{\text{Création/disparition dans le volume}} \quad \text{(quantités algébriques)}$$

Ou encore : $$dG = G(t+dt) - G(t) = \underbrace{\delta G_{\text{amont}} + \delta G_{\text{aval}} + \delta G_{\text{latéral}}}_{\text{Flux à travers les frontières}} + \underbrace{\delta G_C}_{\text{Création/disparition dans le volume}}$$

Bilan de masse (tube de champ) :

Masse entrant en 1 dans le système entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$: $\mathrm{d}m_1$

Masse sortant en 2 du système entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$: $\mathrm{d}m_2$

(à exprimer en fonction des flux et des vecteurs densités de flux)

Variation de la masse du système entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$: $\mathrm{d}m$

(à exprimer en fonction de μ et du volume du système)

La variation de masse du système entre t et $t + \mathrm{d}t$ est donc $\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_2 + \mathrm{d}m_1$ (algébriques)

Ou encore $\dfrac{dm}{dt} = \sum_i D_{m_i}$ (somme des débits massiques algébriques).

Pour un problème unidimensionnel (sans source ni échanges à travers la paroi latérale) :

$\mathrm{d}m_x = D_{mx}\,\mathrm{d}t = \vec{j}(x,t)\cdot d\vec{S}_x\,\mathrm{d}t = j(x,t)\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}m_{x+dx} = D_{mx+dx}\,\mathrm{d}t = -\,j(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}S_{x+dx}\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}m = \mu(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}x - \mu(t)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}x$

D'où $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$ ou encore $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$

Applications – Bilans locaux (volume mésoscopique)

Bilan de particules : $\dfrac{\partial n}{\partial t} + div\,\vec{j}_N = 0$ (diffusion particulaire sans source)

Bilan d'énergie : $\dfrac{\partial \mu c T}{\partial t} + div\,\vec{j}_Q = 0$ (diffusion thermique sans source ni convection)

Bilan de masse : $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$ (mécanique des fluides)

Bilan de charge : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$ (électromagnétisme)

Bilan d'énergie électromagnétique : $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + div\,\vec{\Pi} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$

Bilan d'énergie acoustique : $\dfrac{\partial e}{\partial t} + div\,\vec{\Pi} = 0$